

DELHI  
UNIVERSITY  
LIBRARY.

Class No. 517

Shelf No. K78T

DELHI UNIVERSITY LIBRARY

Cl. No. B32

168NG-

Date of release for loan

Ac. No. 29202

This book should be returned on or before the date last stamped below. An overdue charge of one anna will be charged for each day the book is kept overtime.







بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

# تفرقی و تکیلی حصا

(برائے انٹرمیڈیٹ)

تصنیف

کشن چند و رضی الدین صدیقی

پروفیسر ان ریاضی جامعہ عثمانیہ

۱۳۵۸ھ م ۱۳۵۸ھ م ۱۹۳۹ء

طبع و اشاعت جامعہ عثمانیہ





# دیسپاچہ

جدید اور اعلیٰ ریاضی سے واقفیت حاصل کرنے کے لیے تفرقی اور تکلی حصا کا علم ناگزیر ہے۔ اس احصاء کی اہمیت صرف نظری ریاضی ہی میں نہیں ہے بلکہ موجودہ زمانے میں ریاضی کا جو استعمال علم حرکت، علم ہیئت، طبیعیات، کیمیا، انجینیری اور دوسرے علوم طبعی و عمرانی میں ہوتا ہے اس کا بھی زیادہ دار و مدار اسی علم احصاء پر ہے۔ چنانچہ جامعہ عثمانیہ نے ریاضی کی تعلیم کے جدید رجحان کے مطابق اس مضمون کو انٹرمیڈیٹ کے ریاضی کے نصاب میں شامل کیا تاکہ جامعاتی تعلیم کی ابتدا اسی سے طلباء کو ریاضی کی اس اہم ترین شاخ سے واقفیت ہو جائے۔

یہ کتاب ان طلباء کی خاطر لکھی گئی ہے جو علم احصاء کا بالکل پہلی مرتبہ مطالعہ کر رہے ہیں۔ چونکہ اس علم میں انتہا کا موضوع سب سے زیادہ اہم ہے اور سارے علم احصاء کا انحصار اسی پر ہے اس لیے انتہا کے مفہوم کو پہلے اور دوسرے باب میں بنیات تفصیل اور وضاحت کے ساتھ بیان کیا گیا ہے۔ استاد اور طالب علم دونوں کی یہ کوشش ہونی چاہیے کہ جب تک انتہا کا مفہوم اچھی طرح ذہن نشین نہ ہو جائے آگے نہ بڑھیں۔

انٹرمیڈیٹ کے نصاب کا لحاظ رکھتے ہوئے ہم نے صرف اس پر اکتفا کیا ہے کہ مختلف تغالوں کو تفرق اور تکلی کرنے کے قاعدے بیان

کریں اگرچہ چھٹے باب میں تفریق سر کے ایک دو استعمال بھی مختصر طور پر بتائے گئے ہیں۔ اس بات کی کوشش کی گئی ہے کہ یہ کتاب اپنے حدود کے اندر مکمل ہو۔ یہ مقصد دو طرح سے حاصل ہوا ہے۔ ایک تو یہ کہ جو تعریفیں اور ثبوت دیے گئے ہیں وہ ریاضیاتی نقطہ نظر سے باضابطہ اور صحیح ہیں اور اعلیٰ جماعتوں میں بھی کام دے سکتے ہیں۔ علم احصاء کی ابتدائی کتابوں میں عموماً یہ نقص ہوتا ہے کہ مبہم طور پر ہندسی شکلوں کی مدد سے بتا دیا جاتا ہے کہ مسئلہ کا صحیح ہونا قرین قیاس سے ہے اور کیا ہے۔ ہذا باطلہ ثبوت دینے کے طالب علم کے وجدان سے ایسا ہی ہے۔ نتیجہ یہ ہے کہ جو شخص اس کتاب کو پڑھتا ہے وہ اس سے غائب علم میں غلط استدلال کی عادت نہ پکڑے اور اس کے چاہے کہ صحیح استدلال کو اخذ کرنے میں دقت ہوتی ہے۔ ریاضی کی تعلیم کے بعد نظریہ کے بموجب یہ طریقہ قطعی نامناسب ہے۔ ریاضی کے کسی موضوع کے غلط پڑھانے کی یہ نسبت اس کا نہ پڑھنا زیادہ بہتر ہے۔ ہم نے اس کتاب میں کہیں ایسے ثبوت نہیں دیے ہیں جن کو آگے چل کر جھلادینا پڑے۔ اگر بعض مقاموں پر ہندسی شکلوں سے مدد لی گئی ہے تو ان کے ساتھ باضابطہ ثبوت بھی دیے گئے ہیں۔

دوسرے یہ کہ بین عنوان اور بحث کی گئی ہے ان کے متعلق تمام ضروری امور بتا دیے گئے ہیں تاکہ پھر انہیں ان کے اصل جگہوں میں دوبارہ بحث کی ضرورت باقی نہ رہے۔ مثلاً انتہا، تسلسل، الجبرائی مثلثی، و کارثی اور قوت نسبی تفاعلوں اور ان سے مراد تفاعلوں کو تفریق کرنے کے طریقوں پر کافی کمال بحث کی گئی ہے۔ اسی طرح معیاری کسٹوں، کسٹوں میں تغیر کی تبدیلی اور تکمیل، یا حصص کا بھی کم و بیش تفصیل طور پر ذکر کیا گیا ہے۔ آخر میں تفاعلوں کی اعظم اور اقل قیمتوں اور مخفیوں کے تناسب و انہما کو واضح طور پر بیان کیا گیا ہے۔

ہم ان تمام حضرات کے متکوریں جن کے سفید مشوروں سے  
 ہم نے اس کتاب کی تحریر کے وقت استفادہ کیا۔ ہم سرشتہ تالیف ترجمہ  
 کے ارباب کے بھی شکر گزار ہیں جن کی مدد و کوشش کی وجہ سے کتاب  
 کی حیثیت میں بہت سہولت ہوئی فقط

کشن چند  
 رضی الدین صدیقی



# فہرست مضامین

## احصائے تفرقی و تکمیلی

| صفحہ | مضامین                                     |
|------|--|
| ۱    | باب اول: تفاعل اور انتہا                   |
| ۱    | ۱۶۱ — اعداد                                |
| ۱    | ۱۶۱ — منطق عدد                             |
| ۲    | ۱۶۲ — غیر منطق عدد                         |
| ۴    | ۱۶۳ — حقیقی عددوں کی تعبیر خط مستقیم پر    |
| ۷    | ۱۶۴ — تفاعل                                |
| ۷    | ۱۶۴ — مستقل اور متغیر مقداریں              |
| ۸    | ۱۶۲ — قبوع اور تابع متغیر — تفاعل کی تعریف |
| ۹    | ۱۶۳ — چند سادہ تفاعل اور ان کی ترسیم       |

| صفحہ | مضامین  |
|------|---|
| ۱۳   | مشقی سوالات (۱)                               |
| ۱۶   | ۱۵۲۴۔ ایک مثبت صحیح متغیر کے تفاعل (تواتر)    |
| ۱۸   | ۱۵۳۱۔ تواتر کی انتہا                          |
| ۱۸   | ۱۵۳۱۔ ن مائل بہ لاتناہی کے معنی               |
| ۱۹   | ۱۵۳۲۔ انتہا کے مفہوم کی توضیح مثالوں کے ذریعہ |
| ۲۵   | ۱۵۳۳۔ انتہا کی باضابطہ تعریف                  |
| ۲۸   | توضیحی مثالیں                                 |
| ۳۰   | مشقی سوالات (۲)                               |
| ۳۱   | ۱۵۴۱۔ انتہا کے متعلق عام مسائل                |
| ۳۹   | مشقی سوالات (۳)                               |
| ۴۰   | ۱۵۴۶۔ استدقاق کا عام اصول                     |
| ۴۲   | ۱۵۵۱۔ مسلسل متغیر کے تفاعل کی انتہا           |
| ۴۳   | ۱۵۵۱۔ "لامائل برج" کے معنی۔ تفاعل کی انتہا    |
| ۴۴   | ۱۵۵۲۔ انتہا کی دوسری تعریف                    |
| ۴۹   | ۱۵۵۳۔ انتہا کے متعلق مسئلے                    |
| ۵۰   | ۱۵۵۴۔ مسئلہ                                   |
| ۵۳   | ۱۵۵۵۔ مثالیں                                  |
| ۵۵   | مشقی سوالات (۴)                               |

| صفحہ | مضامین  |
|------|---|
| ۵۹   | باب دوم: مسلسل تفاعل                          |
| ۵۹   | ۲۱ — مسلسل تفاعل کی تعریف                     |
| ۵۹   | ۲۱۱ — تسلسل کا مفہوم                          |
| ۶۲   | ۲۱۲ — مسلسل تفاعل کی تعریف                    |
| ۶۳   | ۲۱۳ — ایک وقفہ میں مسلسل تفاعل                |
| ۶۴   | ۲۲ — مسلسل تفاعل کی مثالیں                    |
| ۶۵   | ۲۲۱ — مثال ۱: $ا = با$ لا                     |
| ۶۵   | ۲۲۲ — مثال ۲: $با = لا - با$ لا               |
| ۶۷   | ۲۲۳ — مثال ۳: $با = جب لا$                    |
| ۶۸   | ۲۲۴ — مثال ۴: $با = مس لا$                    |
| ۷۰   | مشقی سوالات (۵)                               |
| ۷۱   | ۳ — مسلسل تفاعلوں کے متعلق مسائل              |
| ۷۳   | مثالیں  |
| ۷۴   | ۴ — چند اہم انتہائیں                          |
| ۷۴   | ۴۱ — $نبا$ لا                                 |
| ۷۶   | ۴۲ — $نبا = \frac{لا - و}{و - لا} = ن - و$ لا |
| ۷۹   | ۴۳ — $نبا = \frac{لا}{ن - لا}$ لا             |



| صفحہ | مضامین  |
|------|---|
| ۸۰   | ۲۶۴۴ - $\text{نہا} \left( 1 + \frac{1}{\text{ن}} \right)$   |
| ۸۳   | ۲۶۴۵ - $\text{نہا} \left( 1 + \frac{\text{لا}}{\text{ن}} \right)$ - قوت نمائی تفاعل                           |
| ۸۹   | ۲۶۴۶ - نوکارتی تفاعل  |
| ۹۴   | مشقی سوالات (۶)   |
| ۹۴   | ۲۶۴۷ - $\text{نہا} \frac{\text{جب ط} = 1}{\text{ط}} \text{ اور } \text{نہا} \frac{\text{مس ط} = 1}{\text{ط}}$ |
| ۹۸   | مشقی سوالات (۷)   |
| ۹۹   | باب سوم : تفرق اور تفرقی سر   |
| ۹۹   | ۳۶۱ - تفاعل کی قیمت میں تبدیلی  |
| ۹۹   | ۳۶۲ - فرق   |
| ۱۰۰  | توضیحی مثالیں   |
| ۱۰۲  | مشقی سوالات (۸)   |
| ۱۰۳  | ۳۶۳ - نسبت فرق  |
| ۱۰۵  | توضیحی مثالیں   |
| ۱۰۷  | مشقی سوالات (۹)   |

| صفحہ | مضامین                                |
|------|---------------------------------------|
| ۱۰۸  | ۳ و ۴ — تفرقی سر                      |
| ۱۰۸  | توضیحی مثالیں                         |
| ۱۱۰  | مشقی سوالات (۱۰)                      |
| ۱۱۰  | ۳ و ۵ — تکمل                          |
| ۱۱۱  | توضیحی مثالیں                         |
| ۱۱۱  | مشقی سوالات (۱۱)                      |
| ۱۱۲  | ۳ و ۶ — تفرق اور تکمل کی معیاری شکلیں |
| ۱۱۲  | ۳ و ۶ — لان جہاں ن مثبت صحیح عدد ہے   |
| ۱۱۳  | مشقی سوالات (۱۲)                      |
| ۱۱۴  | ۳ و ۷ — تفاعل کا تفاعل                |
| ۱۱۵  | توضیحی مثالیں                         |
| ۱۱۶  | مشقی سوالات (۱۳)                      |
| ۱۱۷  | ۳ و ۸ — مثلثی تفاعلوں کا تفرقی سر     |
| ۱۲۰  | توضیحی مثالیں                         |
| ۱۲۱  | مشقی سوالات (۱۴)                      |

| صفحہ | مضامین   |
|------|--|
| ۱۲۱  | ۳۶۴- تفاعلوں کے حامل ضرب اور حاصل تقسیم کو تفرق کرنا |
| ۱۲۳  | توضیحی مثالیں  |
| ۱۲۴  | مشقی سوالات (۱۵)                                     |
| ۱۲۴  | ۳۶۵- تضمینی تفاعل کو تفرق کرنا                       |
| ۱۲۵  | توضیحی مثالیں  |
| ۱۲۶  | مشقی سوالات (۱۶)                                     |
| ۱۲۷  | ۳۶۶- متغلب مثلثی تفاعلوں کو تفرق کرنا                |
| ۱۳۱  | توضیحی مثالیں  |
| ۱۳۱  | مشقی سوالات (۱۷)                                     |
| ۱۳۲  | ۳۶۷- لوکارتم اور قوت نما تفاعلوں کی تعریف            |
| ۱۳۴  | ۳۷۵- قوت نما اور لوکارتم تفاعل کو تفرق کرنا          |
| ۱۳۶  | توضیحی مثالیں  |
| ۱۳۷  | مشقی سوالات (۱۸)                                     |
| ۱۳۸  | ۳۷۸- اعلیٰ رتبہ کے تفرق سر                           |

| صفحہ | مضامین  |
|------|---|
| ۱۳۹  | توضیحی مثالیں   |
| ۱۴۰  | مشقی سوالات (۱۹)  |
| ۱۴۲  | ۳۶۹ — جزوی مشق  |
| ۱۴۲  | توضیحی مثالیں   |
| ۱۴۳  | مشقی سوالات (۲۰)  |
| ۱۴۵  | باب سوم پر متفرق سوالات                                       |
| ۱۴۹  | باب چہارم : تفرقی سر کے اطلاق                                 |
| ۱۴۹  | ۴۱۴ — تفرقی سر کا استعمال                                     |
| ۱۴۹  | ۴۱۴ — منحنی کا ڈھال، مماس اور عماد کی مساواتیں وغیرہ          |
| ۱۵۳  | مشقی سوالات (۲۱)  |
| ۱۵۷  | ۴۲۵ — منحنی کے قوس کا طول                                     |
| ۱۵۹  | ۴۳۳ — منحنی کی تبدیل مساوات                                   |
| ۱۶۱  | ۴۳۴ — قطبی محدودوں میں منحنی کا ڈھال                          |
| ۱۶۳  | ۴۳۵ — قطبی محدودوں میں قطبی زیر مماس اور قطبی زیر عماد کا طول |
| ۱۶۷  | ۴۳۶ — الجبرا میں تفرقی سر کا استعمال                          |
| ۱۷۰  | ۴۳۷ — اعظم اور اقل قیمتیں                                     |

| صفحہ  | مضامین                                      |
|-------|---|
| ۱۷۴   | ۴۷۲۔ دوسرے رتبہ کے مشتق کی ہندسی تعبیر      |
| ۱۷۷   | ۴۷۵۔ تجزب اور مقعر منحنی                    |
| ۱۸۰   | ۴۷۹۔ ———— علی ریاضی میں تفرقی سر کے اطلاقات |
| ۱۸۰   | ۴۷۹ا۔ — رقرار اور اسراع                     |
| ۱۸۶   | ۴۷۹۲۔ شرح تبدیلی کے دیگر اطلاقات            |
| <hr/> |   |
| ۱۹۰   | باب پنجم: تکمیل                             |
| ۱۹۰   | ۵۷۱۔ — غیر معین تکملہ کی تعریف              |
| ۱۹۲   | ۵۷۲۔ — ابتدائی معیاری شکلیں                 |
| ۱۹۹   | مشقی سوالات (۲۲)                            |
| ۱۹۹   | ۵۷۳۔ — متغیر کی تبدیلی                      |
| ۲۰۹   | مشقی سوالات (۲۳)                            |
| ۲۱۰   | ۵۷۴۔ — تکمیل بالخصوص                        |
| ۲۲۰   | مشقی سوالات (۲۴)                            |
| ۲۲۱   | ۵۷۵۔ — معین تکملہ                           |
| ۲۲۱   | ۵۷۵ا۔ — تکملہ کی ہندسی تعبیر                |
| ۲۲۳   | ۵۷۵۲۔ — معین تکملہ کی تعریف                 |
| ۲۲۶   | ۵۷۵۳۔ — مثالیں                              |

| صفحہ | مضامین   |
|------|--|
| ۲۳۲  | مشقی سوالات (۲۵)   |
| ۲۳۳  | ۵۶ ——— میں مکملہ میں متغیر کی تبدیلی                         |
| ۲۳۶  | مشقی سوالات (۲۶)   |
| ۲۳۷  | ۵۷ ——— مثلثی ابدال   |
| ۲۴۱  | مشقی سوالات (۲۷)   |
| ۲۴۲  | <b>باب ششم: تفرقی سر کے مزید اطلاقات</b>                     |
| ۲۴۲  | ۶۱ ——— رول کا مسئلہ  |
| ۲۴۵  | ۶۲ ——— اوسط قیمت کا مسئلہ                                    |
| ۲۴۹  | ۶۳ ——— اوسط مسئلہ کی توسیع                                   |
| ۲۵۴  | ۶۴ ——— ٹیلر کے پھیلاؤ کی مدد سے اعظم اور قفل قیمتوں کا مسئلہ |
| ۲۵۶  | ۶۵ ——— غیر معین شکلیں  |
| ۲۵۷  | ۶۵۱ ——— صفر  |
| ۲۶۰  | ۶۵۲ ——— لاتناہی  |
| ۲۶۴  | ۶۶ ——— تماس  |
| ۲۶۷  | ۶۷ ——— انحناء  |
| ۲۷۰  | ۶۸ ——— انحناء کی دوسری تعریف                                 |



# احصائے تفرقی و یکلی

## باب اول تفاعل اور انتہا

### ۱-۱۔ اعداد۔

۱۱- نہ صرف ابتدائی ریاضی میں بلکہ روزمرہ زندگی میں بھی ہم کو عددوں سے اکثر سابقہ پڑتا ہے اور اس لیے بحث کی ابتدا میں ہم مان لیتے ہیں کہ طالب علم کو ابتدائی ریاضی کے اعداد یعنی اعداد صحیح اور کسر سے خواہ وہ مثبت ہوں یا منفی، کافی واقفیت ہے۔

اعداد کی اس جماعت کو جس میں تمام صحیح اور کسور مثبت اور منفی عدد شامل ہوں ہم اعداد کی ”منطق“ جماعت کہتے ہیں اور اس جماعت کے کسی فرد کو ”منطق“ عدد کہتے ہیں۔ ابتدائی ریاضی سے ہمیں یہ معلوم ہے کہ یہ منطق جماعت ذیل کی خاصیتیں رکھتی ہے :-

(۱) کسی دو منطق عددوں کا حاصل جمع ایک منطق عدد ہے۔

(۲) کسی دو منطق عددوں کا فرق ایک منطق عدد ہے۔



(۳) کسی دو منطق عددوں کا حاصل ضرب ایک منطق عدد ہے۔  
 (۴) کسی دو منطق عددوں کا خارج قسمت ایک منطق عدد ہے۔  
 ایک منطق عدد کو عام سے عام طور پر  $\frac{ف}{ق}$  کی شکل میں لکھ سکتے ہیں جس میں ہم مان لیتے ہیں کہ  $ف$  اور  $ق$  مثبت یا منفی صحیح عدد ہیں۔

۱۱۲۔ اکثر اوقات ہم کو ایسے عددوں سے بھی سابقہ پڑتا ہے جو منطق نہیں ہیں یعنی جو ایک کس  $\frac{ف}{ق}$  کی شکل میں سمجھی نہیں تعبیر کیے جاسکتے۔ اس کی ایک آسان مثال کے طور پر ہم اُس عدد پر غور کرتے ہیں جس کا مربع ۲ ہے یعنی باغاط دیگر ہم ۲ کے جذر المربع پر غور کرتے ہیں جس کو بالعموم  $\sqrt{۲}$  لکھا جاتا ہے۔ بعض محال ہم مان لیتے ہیں کہ  $\sqrt{۲} = \frac{ف}{ق}$  جہاں ہم یہ فرض کر سکتے ہیں کہ  $ف$  اور  $ق$  دو مثبت صحیح عدد ہیں جن میں کوئی مشترک جزو ضربی نہیں ہیں ورنہ ہم انہیں تقسیم کے ذریعہ خارج کر دیتے۔

پس  $\frac{ف^۲}{ق^۲} = ۲ = ۲ \times ۲ = ۲ ق^۲ = ۲ ق^۲$  ..... (۱)

اس سے ظاہر ہے کہ  $ف^۲$  ایک جفت عدد ہے۔ اس لیے  $ف$  بھی ایک جفت عدد ہونا چاہیے کیونکہ کسی طاق عدد کا مربع جفت نہیں ہو سکتا۔

پس  $ف = ۲ م$  ..... (۲)  
 جہاں  $م$  کوئی مثبت صحیح عدد ہے۔ اس کو مساوات (۱) میں درج کرنے پر حاصل ہوتا ہے کہ

$$۲ ق^۲ = ۲ (۲ م)^۲ = ۲ م^۲$$

یعنی  $ق^۲ = م^۲$  ..... (۳)

مساوات (۳) سے ظاہر ہے کہ  $ق$  بھی ایک جفت عدد ہے اور اس لیے  $ق$  بھی ایک جفت عدد ہے

ق = ۲ ن ..... (۴)

جہاں ن ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

مساواتوں (۲) اور (۴) سے ظاہر ہے کہ ف اور ق میں ایک مشترک مجزؤ ضربی ۲ ہے جو مفروض کے خلاف ہے۔ ۲۱ کو ایک

منطق عدد  $\frac{ف}{ق}$  کے مساوی ماننے کی وجہ سے یہ تضاد حاصل ہو رہا ہے

اس لیے یہ نتیجہ ہم اخذ کرتے ہیں کہ ۲۱ کوئی منطق عدد نہیں ہے یعنی

۲۱ کو ہم ایک کسر عام یا ایک محدود کسر اعشاریہ کی شکل میں تعبیر

نہیں کر سکتے۔ صرف ۲۱ ہی ایک ایسا عدد نہیں ہے بلکہ ایسے

بے شمار عدد ہیں جو ایک کسر عام یا ایک محدود کسر اعشاریہ کی شکل میں

نہیں لکھے جاسکتے۔ ان کی چند مثالیں ۳۱، ۲۱۳، ۲۱ + ۲۱ وغیرہ

ہیں۔

ایسے تمام اعداد کو جو منطق نہیں ہیں یعنی ایک کسر  $\frac{ف}{ق}$  کی شکل میں

نہیں لکھے جاسکتے ہم "غائب منطق" اعداد کہتے ہیں۔ عددوں کی وہ جماعت

جس میں تمام منطق عدد اور تمام غیر منطق عدد شامل ہیں اعداد کی حقیقی

جماعت کہلاتی ہے اور اس جماعت کے کسی فرد کو ہم حقیقی اعداد

کہتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ ایک حقیقی عدد منطق یا غیر منطق کچھ ہی

ہو سکتا ہے۔

غیر منطق عددوں کی دو بڑی قسمیں ہوتی ہیں:- ایک وہ غیر منطق عدد

جن کی مثالیں اوپر دی جا چکی ہیں یعنی ۲۱، ۲۱۳ وغیرہ۔ ظاہر ہے کہ

۲۱ جبری مساوات لا-۲ = ۰ کی ایک اصل ہے۔ اسی طرح ۲۱۳

جبری مساوات لا-۲ = ۰ کی ایک اصل ہے۔ وہ غیر منطق عدد جو

کسی جبری مساوات کی اصلیں ہوں خواہ یہ مساوات کسی درجہ کی ہو ان عددوں

کو جبری عدد کہتے ہیں۔ پس ۲۱، ۲۱۳ وغیرہ جبری عدد ہیں۔ لیکن

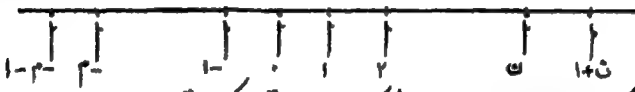
بعض غیر منطق عدد ایسے ہیں جو کسی جبری مساوات کی اصل نہیں ہیں مثلاً ۳۱





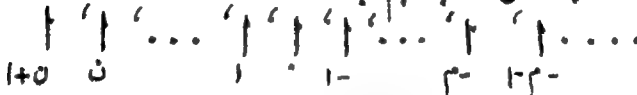
یعنے کسی دائرہ کے محیط اور قطر کی نسبت، ایک غیر منطبق عدد ہے جو کسی جبری مساوات کی اصل نہیں ہے۔ ایسے عددوں کو 'ماورائی عدد' کہتے ہیں۔ آگے چل کر طالب علم کو اور دوسرے ماورائی عددوں سے سابقہ پڑیگا۔

۳۱۱۱۔ ہم ایک خط مستقیم لیتے ہیں جس کو ہم دونوں طرف جس قدر چاہیں خارج کیا ہوا مان لیتے ہیں۔ اس خط پر ہم کوئی نقطہ 'مقرر کر لیتے ہیں اور اسے کسی مناسب پیمانہ پر ایک حصہ '۱' کاٹ لیتے ہیں۔



نقطہ '۱' کو ہم صفر سے اور '۱۰' کو '۱۰' سے تعبیر کرتے ہیں۔

اب اس خط پر ہم بہت سے نقطے



ایسے معین کرتے کہ اگر ان حصّوں کو بائیں جانب سے سیدھی جانب ناپا جائے تو



تب ہم دیکھتے ہیں کہ اگر 'ن' کوئی مثبت صحیح عدد ہو تو

$$(1) \dots\dots\dots = \frac{1}{1}$$

اب ہم یہ مان لیتے ہیں کہ طول ایک ایسی مقدار ہے جس کی علامت مثبت ہوتی ہے اگر طول کو بائیں سے سیدھی جانب ناپا جائے اور جس کی علامت منفی ہوتی ہے اگر طول کو سیدھی سے بائیں جانب ناپا جائے

یعنے '۱' مثبت اور '۱' منفی جس سے ملتا ہے کہ '۱' = - '۱'۔ پس



$$\frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \text{ تو ظاہر ہے کہ } \frac{1}{1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} - \frac{1}{1}$$

اس طرح اگر ہم 'ن' اور 'ق' کی تمام ممکنہ مثبت صحیح قیمتوں کے لیے نقاط  $\frac{1}{1}$  معلوم کریں تو ہم کو تمام مثبت صحیح یا کسری عددوں 'س' کے جواب میں ایک نقطہ مل جائیگا جس کے لیے

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{1} \text{ س } \dots \dots \dots (۳)$$

اب اگر (-س) ایک واجب یا غیر واجب منفی کسر ہے تو خط پر ہم ایک نقطہ ایسا لیتے ہیں کہ  $\frac{1}{1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{1}$  یعنی

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{1} = -\frac{1}{1} \text{ س}$$

اس طرح ہم کو تمام منطقی عددوں 'ر' کے جواب میں ایک نقطہ 'ا' ایسا مل جاتا ہے کہ

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{1} \text{ ر } \dots \dots \dots (۴)$$

اب اگر ہم حصہ  $\frac{1}{1}$  کو طول کی اکائی مان لیں تو

یہ آسانی دیکھا جاسکتا ہے کہ ہر غیر منطقی عدد دو منطقی عددوں کے درمیان واقع ہوتا ہے۔ مثلاً ۲۱ جو غیر منطقی ہے ۳ اور ۴ کے درمیان واقع ہے یا ۲۲ جو ایک ماورائی عدد ہے ۲۱ اور ۲۲ کے درمیان واقع ہے۔ اس لیے ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ خط مستقیم پر اگر  $1 = 1$  اور  $2 = 2$  تو

۱ اور ب کے درمیان ایک نقطہ ج ایسا موجود ہے کہ  $\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$  اس طرح اگر  $\frac{1}{2} = \frac{1}{3}$  اور  $\frac{1}{3} = \frac{1}{4}$  تو نقاط د اوری کے درمیان ایک نقطہ ف ایسا ہے کہ  $\frac{1}{3} = \frac{1}{4}$ ۔  
غرض ہم یہ دیکھ رہے ہیں کہ ایک خط مستقیم پر کے نقطوں سے تمام حقیقی اعداد کی جماعت کو اس طرح تعبیر کیا جاسکتا ہے کہ ہر حقیقی عدد کے جواب میں چاہے وہ منطقی ہو یا غیر منطقی خط مستقیم پر ایک اور صرف ایک نقطہ ملتا ہے اور اس کے برعکس خط مستقیم پر ہر نقطہ ایک اور صرف ایک حقیقی عدد کے جواب میں ہے۔

## ۱۶۲۔ تفاعل۔

۱۶۲۔ مستقل اور متغیر مقداریں۔ حقیقی اعداد پر ہم دو طرح سے غور کر سکتے ہیں ایک تو یہ کہ ہم ان میں سے کسی ایک خاص حقیقی عدد کو لیں مثلاً  $\frac{1}{2}$  یا  $\frac{1}{3}$  یا  $\frac{1}{4}$  یا  $\frac{1}{5}$  ان اعداد کی قیمت کسی سوال میں اور بالعموم ہمیشہ وہی ایک رہتی ہے اور ان میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی۔ بعض وقت ایسا ہوتا ہے کہ کسی مقدار کی ٹھیک قیمت ہمارے لیے غیر اہم ہے۔ ہم اس قیمت کو جو چاہیں فرض کر سکتے ہیں لیکن ایک مرتبہ کوئی قیمت فرض کر لینے کے بعد بحث کے ختم ہونے تک ہم اس قیمت کو نہیں بدل سکتے۔ ایسی مقداروں کو ہم حروف تہجی کے پہلے چند حروف 'ا' 'ب' 'ج' وغیرہ سے تعبیر کرتے ہیں۔ ان کی قیمت ایک مسئلہ یا ایک سوال کے وزن میں نہیں بدلتی۔ ایسی مقدار کو ہم "مستقل" کہتے ہیں۔

لیکن علم ریاضی میں ہم کو اکثر ایسی مقداروں سے بھی سابقہ پڑتا ہے جو ایک ہی مسئلہ کے دوران میں چند یا بہت سی قیمتوں میں سے ہر ایک قیمت اختیار کر سکتی ہیں۔ ایسی مقداروں کو بالعموم 'لا' 'ا' 'ی' وغیرہ سے تعبیر کرتے ہیں۔ مثلاً اگر ہم سال کا لاواں مہینہ





بازو لکھ دیا جائے۔

ان تمام حالتوں میں یعنی اس وقت جبکہ دو متغیروں لا اور ما میں سے ایک متغیر لا کی متعدد قیمتوں کے جواب میں دوسرے متغیر ما کی متعدد قیمتیں حاصل ہوں تو ہم کہتے ہیں کہ ما ایک "تفاعل" ہے لا کا۔ اس میں لا کو "متغیر مستبوع" اور ما کو "متغیر تابع" کہتے ہیں۔

تفاعل کے مفہوم سے متعلق چند مثالیں طالب علم کو علم مند رہیں معلوم ہو چکی ہونگی۔ مثلاً اگر ہم ایک دائرہ کے محیط کے طول پر غور کریں تو معلوم ہوتا ہے کہ دائرہ کے نصف قطر کے بدلنے سے محیط کے طول میں بھی تبدیلی ہوتی ہے اور کسی نصف قطر لا کے جواب میں ہم کو محیط کا طول ما ذیل کے رشتہ سے حاصل ہوتا ہے:-

$$م = ۳.۱۴ لا$$

اس صورت میں ہم دائرہ کے نصف قطر کو متغیر مستبوع اور محیط کے طول کو متغیر تابع کہتے ہیں۔ اور اس رشتہ کو ہم بھی بیان کرتے ہیں کہ کسی دائرہ کے محیط کا طول اس کے نصف قطر کا ایک تفاعل ہے۔ بطور ایک دوسری مثال کے ہم دیکھتے ہیں کہ ایک مستقل قاعدے والے مثلث کا رقبہ ارتفاع کے ساتھ ساتھ بدلتا رہتا ہے۔ اس لیے اگر مثلث کے رقبہ کو ہم متغیر تابع ما سے اور ارتفاع کو متغیر مستبوع لا سے تعبیر کریں تو ہم کہہ سکتے ہیں کہ مثلث کا رقبہ ارتفاع کا ایک تفاعل ہے اور اس کو لکھتے ہیں:-

$$م = \frac{۱}{۲} لا$$

جہاں م مستقل قاعدہ ہے۔

۱۲۳۔ چند سادہ تفاعل اور ان کی ترسیم۔ تفاعل کے

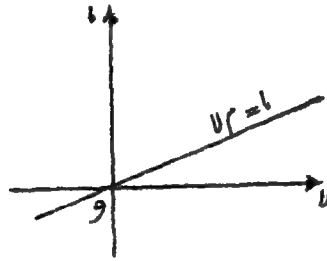
مفہوم کو واضح کرنے کی خاطر ہم چند سادہ تفاعلوں پر غور کریں گے۔

سب سے پہلی مثال کے طور پر ہم تفاعل

$$م = لا$$

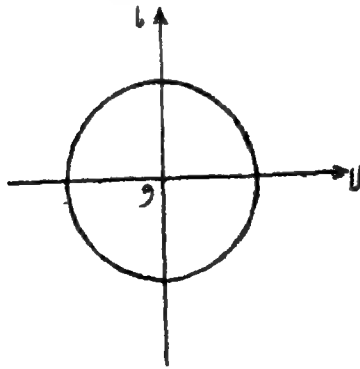
پر غور کرتے ہیں۔ علم ہندسہ تحلیلی سے ہمیں معلوم ہے کہ یہ مساوات ایک خطِ مستقیم کو تعبیر کرتی ہے جو مبدأ میں سے گزرتا ہے اور جو محور لا کے ساتھ ایسا زاویہ طہ بناتا ہے کہ

$$\text{مس طہ} = \text{م}$$



اس میں ہم دیکھتے ہیں کہ تفاعل م لا کی ترسیم ایک خطِ مستقیم ہے۔ اس کے علاوہ ہمیں یہ بھی معلوم ہوتا ہے کہ محور ما کے متوازی کوئی خط اس خط کو صرف ایک ہی نقطہ پر کاٹتا ہے۔ بالفاظِ دیگر لا کی ہر قیمت کے جواب میں ما کی صرف ایک ہی قیمت حاصل ہوتی ہے۔ ایسے تفاعل کو ایک "قیمتی" کہتے ہیں۔  
برخلاف اس کے اس تفاعل ما پر غور کرو جو ذیل کے جملے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{لا} = \text{ما} + ۱$$



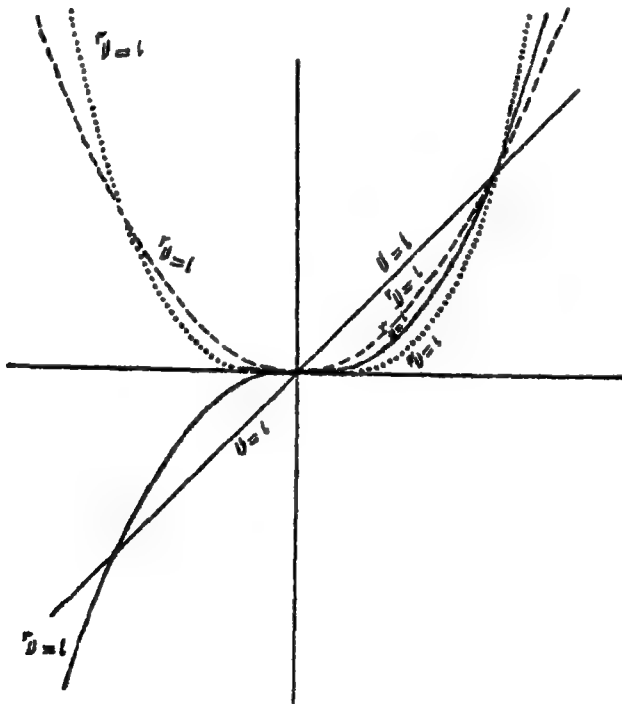
ہندسہ تحلیلی سے ہم کو معلوم ہے کہ یہ مساوات ایک دائرہ کو تعبیر

کرتی ہے جس کا مرکز مبدا پر واقع ہے اور نصف قطر ۱ ہے۔ اب یہ آسانی سے دیکھا جاسکتا ہے کہ لا کی کسی قیمت کے لیے اس دائرہ کی مساوات سے ما کی دو مساوی لیکن مختلف علامت قیمتیں حاصل ہوتی ہیں :-

$$M = \pm \sqrt{1 - L^2}$$

ایسے تفاعلوں کو جو متغیر متبوع کی ایک قیمت کے لیے ایک سے زیادہ مختلف قیمتیں اختیار کرتے ہیں "بسیار قیمتی" تفاعل کہتے ہیں۔

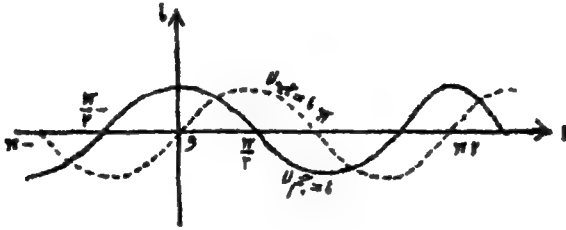
ذیل کی شکل میں ہم مقابلے کی خاطر  $M = L$  کی ترسیمیں دیتے ہیں جبکہ  $N = 1, 2, 3, 4$ ۔



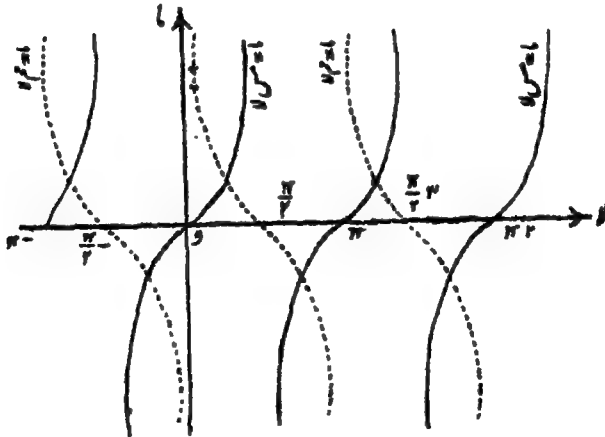
ہم دیکھتے ہیں کہ  $M = L$  اور  $M = -L$  میں لا کی منفی قیمتوں کے

جواب میں ما کی منفی قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔ لیکن  $ما = لا$  اور  $ما = لا$  میں لا کی منفی اور مثبت دونوں قیمتوں کے لیے ما کی مثبت قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔ اول الذکر تفاعلوں کو طاق تفاعل اور آخر الذکر کو جفت تفاعل کہتے ہیں۔ یہ تمام تفاعل جبری تفاعل ہیں۔

لیکن طالب علم کو ان کے علاوہ ایک دوسری قسم کے تفاعلوں سے بھی واقفیت ہے جن کو "مثبت تفاعل" یا "مستند تفاعل" کہتے ہیں۔ ذیل کی شکلوں میں ہم جب لا، جم لا، مس لا اور جم لا کی ترتیبیں دیتے ہیں۔



$ما = جب لا اور ما = جم لا کی ترسیم۔$



$ما = مس لا اور ما = جم لا کی ترسیم۔$

عام سے عام صورت میں جبکہ تفاعل کے مفہوم کو ظاہر کرنا ہو یعنی یہ بتانا مقصود ہو کہ ایک متغیر یا دوسرے متغیر لا کا تفاعل ہے تو ہم فیمل کی ترسیم اختیار کرتے ہیں۔

$$۱ = ف (لا) یا ۱ = ف (لا) یا ۱ = ف (لا) وغیرہ۔$$

مثلاً اگر  $۱ = لا$  پر بحث کریں تو ف اس بات کو ظاہر کرتا ہے کہ متغیر تابع متغیر متبوع کے کعب کے مساوی ہے۔ اور اگر  $۱ = ف$  لا پر غور کریں تو ف اس بات کو بتلاتا ہے کہ متغیر تابع متغیر متبوع کے جیب التمام کے مساوی ہے۔

## مشقی سوالات ۱

(۱) اگر ف (لا) =  $۲ - لا - لا^۲ + لا + لا^۳$  تو ف (۱) ف (۲) ف (۰) ف (۱۰) اور ف (۵) کی قیمتیں دریافت کرو اور تفاعل کی ترسیم کرو۔

$$(۲) \text{ اگر ف (لا) } = \frac{(۱ - لا)(۵ - لا)}{۲(۱ + لا)} \text{ تو ف (۲) ف (۱) ف (۰) ف (۱۰)}$$

ف (۱۱) ف (۱۰) ف (۱) ف (۲) کی قیمتیں معلوم کرو اور تفاعل کی ترسیم کرو۔

$$(۳) \text{ اگر ف (لا) } = (لا - ۱)(لا - ۲) \text{ تو ثابت کرو کہ ف (۱) ف (۱۰)}$$

ف (۲) ف (۳) سب صفر ہیں۔ تفاعل کی ترسیم کے ذریعہ اس کی تصدیق کرو۔

$$(۴) \text{ اگر ف (لا) } = لا^۲ + لا + ج \text{ تو ف (لا + ۱) ف (لا - ۱)}$$

اور ف (لا + ۵) ف (لا) کی قیمتیں معلوم کرو۔

$$(۵) ۱ = \frac{لا^۲ (لا - ۳)}{لا + ۳} \text{ کی ترسیم کرو۔ نقطہ لا } = ۳ \text{ پر}$$

تفاعل کی کیا قیمت ہے۔

$$(۶) ۱ = \frac{لا^۲ - ۹}{۳ - لا} \text{ کی ترسیم کرو اور نقطہ لا } = ۳ \text{ پر تفاعل کی قیمت}$$

معلوم کرو۔

(۷)  $۱ = جب (لا - \frac{\pi}{4})$   $۲ = جب لا$   $۱ + ۲ = جب لا کی ترسیم کرو۔$

(۸)  $۱ = جب لا + جب لا اور ۲ = جب لا - جب لا کی ترسیم کرو۔$

(۹)  $۱ = لا \frac{۲+لا}{۳-لا}$  اور  $۲ = لا \frac{۳+لا}{۴-لا}$  کی ترسیم کرو۔

(۱۰)  $۱ = لا \frac{۱}{۳} - لا \frac{۲}{۴} + ۱$  کی ترسیم کرو۔

(۱۱) اگر ف (لا)  $= لا - لا ۲ + ۲$  تو ف (۲)  $= \frac{۱}{۴}$  اور ف (۲۱) معلوم کرو۔

(۱۲) اگر ف (لا)  $= لا + لا - لا ۲$  تو ف (۱) اور ف (۰) معلوم کرو۔

(۱۳) اگر ف (لا)  $= \frac{جب لا - جب لا}{جب لا + جب لا}$  تو ف (۳) معلوم کرو۔

(۱۴) اگر ف (لا)  $= \frac{جب لا + مس لا}{جب لا + مم لا}$  تو ف (۳) معلوم کرو۔

(۱۵) اگر ف (لا)  $= لا ۲ - لا + ۲$  تو ف (۱۲) اور ف (۱) معلوم کرو۔

(۱۶) اگر ف (لا)  $= لا ۲ - لا ۳ + لا + \frac{۱}{۴}$  تو ف (۶) اور ف (۱+۱) معلوم کرو۔

(۱۷) اگر ف (لا)  $= لا ۲ + لا + ۱$  تو ف (لا + ۱) - ف (لا) معلوم کرو۔

(۱۸) اگر ف (لا)  $= \frac{۱}{۴}$  تو ف (۱+۱) - ف (۱) معلوم کرو۔

(۱۹) اگر ف (لا)  $= (۳+لا) (۳-لا)$  تو ثابت کرو کہ ف (لا) = ف (۳)

(۲۰) اگر ف (لا)  $= \frac{لا + ۱}{لا}$  تو ثابت کرو کہ ف (۱) = ف (لا)

(۲۱) اگر ف (لا)  $= لا + لا + ب لا + ج لا + د$  تو ثابت کرو کہ ف (لا) = ف (لا)

اور اگر ف (لا)  $= لا + لا + ب لا + ج لا + د$  تو ثابت کرو کہ ف (لا) = ف (لا)

(۲۲) اگر ف (لا)  $= لا + ۱$  تو ف (لا + ۱) + ف (لا - ۱) - ف (لا) معلوم کرو۔

(۲۳) اگر ف (لا)  $= \frac{لا + ۱}{لا + ۲}$  تو ثابت کرو کہ ف (۱) = ف (لا)

$$(۲۴) \text{ اگر ف (لا) = ب } \frac{1-لا}{ب-لا} + \frac{1-لا-ب}{ب-لا-ب} \text{ تو ثابت کرو کہ}$$

$$ف (۱) + ف (ب) = ف (۱ + ب)$$

$$(۲۵) \text{ اگر ف (لا) = } \frac{(لا-۱)(لا-ب)}{(ج-۱)(ج-ب)} + \frac{(لا-ب)(لا-ج)}{(ب-۱)(ب-ج)} + \frac{(لا-۱)(لا-ج)}{(ب-۱)(ب-ج)}$$

$$\text{تو ثابت کرو کہ ف (۱) = ف (ب) = ف (ج) = ف (۰)}$$

$$(۲۶) \text{ اگر ف (لا) = } \frac{ب (ج-لا-۱)}{(ب-۱)(ج-۱)} + \frac{ج (ب-لا-۱)}{(ب-۱)(ج-۱)} + \frac{ب (ج-لا-۱)}{(ب-۱)(ج-۱)}$$

$$\text{تو ثابت کرو کہ ف (۱) + ف (ب) + ف (ج) = ۱ + ب + ج}$$

$$(۲۷) \text{ اگر } ۱ = ف (لا) = \frac{۱+لا-ب}{ج-لا-۱} \text{ تو ثابت کرو کہ لا = ف (ب)}$$





## ۲۴-۱۔ ایک مثبت صحیح متغیر کے تفاعل (تواتر)

گذشتہ دفعہ میں ہم نے ایک مسلسل متغیر کے تفاعلوں کی بہت سی مثالیں پیش کی ہیں۔ طالب علم کو یاد ہو گا کہ ہم نے مسلسل متغیر کی تعریف میں یہ شرط لگائی تھی کہ لاکسی دو حقیقی عددوں کے درمیان کی ہر حقیقی قیمت کو اختیار کرے۔ اب ہم ایسے تفاعلوں پر غور کرتے ہیں جن کے متغیر تبوع صرف مثبت صحیح عددی قیمتوں کو اختیار کرتے ہیں۔ پس تبوع متغیر ایک غیر مسلسل متغیر ہے اور اس کو ہم بالعموم  $n$  سے تعبیر کرتے ہیں۔ اس کے تفاعلوں کو ہم  $f(n)$  سے تعبیر کریں گے۔ تبوع متغیر  $n$  کی قیمتیں صرف  $1, 2, 3, \dots$  ایسے صرف مثبت صحیح عدد ہو سکتی ہیں۔  $n$  تبوئی منفی قیمت یا کسری یا غیر منطقی قیمت نہیں اختیار کرتا۔ اس قسم کے تفاعلوں کی چند مثالیں حسب ذیل ہیں:—

(۱) پہلے  $n$  طبعی اعداد کا مجموعہ :

$$S_1(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

(۲) پہلے  $n$  طبعی اعداد کے مربعوں کا مجموعہ :

$$S_2(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(۳) پہلے  $n$  طبعی اعداد کا حاصل ضرب

$$P(n) = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$$

(۴)  $n$  اشیاء میں سے  $k$  اشیاء کے اجتماعوں کی تعداد (ک مستقل ہے)

$$C(n, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$$

تواتر — اگر ہمیں یکے بعد دیگرے بے شمار اعداد

$$1, 2, 3, \dots, n, \dots$$

اس طرح دیے ہوئے ہوں کہ

(۱) ان میں کا سب سے پہلا عدد  $\frac{1}{n}$  معلوم ہو اور  
 (۲) ہر  $n$  دیں عدد  $\frac{1}{n}$  کے بعد ایک  $(n+1)$  واں عدد  $\frac{1}{n+1}$  معلوم  
 کر سکیں تو عددوں کی ترتیب (۱) کو ہم "تواتر" کہتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ تواتر (۱)  
 دراصل ایک مثبت صحیح متغیر  $n$  کا تفاعل ہے۔ تواتر کا یہ مفہوم چند سادہ مثالوں کے  
 ذریعہ بخوبی ذہن نشین ہو جائیگا۔

مثال ۱۔  $\frac{1}{n} = \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}, \frac{1}{14}, \frac{1}{15}, \frac{1}{16}, \frac{1}{17}, \frac{1}{18}, \frac{1}{19}, \frac{1}{20}, \dots$   
 اس تواتر کا پہلا عدد  $\frac{1}{1}$  یعنی ایک ہے اور جو کوئی دوسرا عدد چاہیں آسانی سے  
 معلوم ہو سکتا ہے

مثال ۲۔  $\frac{1}{n} = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}, \frac{1}{14}, \frac{1}{15}, \frac{1}{16}, \frac{1}{17}, \frac{1}{18}, \frac{1}{19}, \frac{1}{20}, \dots$   
 اس تواتر کا پہلا عدد  $\frac{1}{2}$  ہے، ہر جفت عدد ایک کسر ہے جس کا شمار کنندہ ۱  
 اور نسب نما اس جفت عدد کے نصف کے مساوی ہے۔ ہر طاق عدد ایک کسر ہے جس کا  
 شمار کنندہ ۱ اور نسب نما اس کے بعد والے جفت صحیح عدد کے مساوی ہے۔ یعنی تواتر  
 حسب ذیل ہے:-

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}, \frac{1}{14}, \frac{1}{15}, \frac{1}{16}, \frac{1}{17}, \frac{1}{18}, \frac{1}{19}, \frac{1}{20}, \dots$$

$$\text{مثال ۳۔ } \frac{1}{n} = \frac{n}{n+1}$$

اس تواتر کا پہلا عدد  $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$  ہے اور تواتر حسب ذیل ہے:-

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \frac{9}{10}, \frac{10}{11}, \frac{11}{12}, \frac{12}{13}, \frac{13}{14}, \frac{14}{15}, \frac{15}{16}, \frac{16}{17}, \frac{17}{18}, \frac{18}{19}, \frac{19}{20}, \dots$$

پہلی مثال یعنی تواتر  $\frac{1}{n}$  میں ہم دیکھتے ہیں کہ اس تواتر کا ہر عدد  
 یعنی  $\frac{1}{n}$  اپنے پہلے عدد یعنی  $\frac{1}{1}$  سے کم ہے کیونکہ ہمیں معلوم ہے کہ ایک  
 کسر کی قیمت کم ہو جاتی ہے اگر اس کا نسب نما بڑھا ہو جائے۔ اس طرح گویا

تواتر کے مدد قیمت میں اُترتے جلتے ہیں اور اس لیے ایسے تواتر کو نزولی تواتر کہتے ہیں۔

اس کے برخلاف تیسری مثال یعنی تواتر  $\frac{n}{n+1}$  میں یہ آسانی سے ثابت کیا جاسکتا ہے کہ ہر عدد اپنے پہلے کے عدد سے بڑا ہے کیونکہ

$$(n+1) < n^2 + 2n$$

$$n < (n+2)$$

$$\text{یعنی } \frac{n}{n+1} < \frac{n}{n+2}$$

غرض اس تواتر کے اعداد بتدریج بڑھتے جاتے ہیں۔ ایسے تواتر کو صعودی تواتر کہتے ہیں۔

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ دوسری مثال میں دیا ہوا تواتر نہ تو نزولی ہے اور نہ صعودی۔

### ۱۳۔ تواتر کی انتہا۔

۱۳۔ ۱۔  $n \rightarrow \infty$  کے معنی یہ فرض کرو کہ  $n$  کیے بعد دیگرے قیمتیں  $1, 2, 3, \dots$  اختیار کرتا ہے۔ خود کیے بعد دیگرے کے مفہوم سے ظاہر ہے کہ  $n$  یہ قیمتیں مثلاً ہر ثانیہ کے ابتدا میں اختیار کرتا ہے۔ تب جوں جوں ثانیے گزرتے جاتے ہیں  $n$  بڑا ہوتا جاتا ہے اور چونکہ وقت کی کوئی حد نہیں ہے اس لیے  $n$  کے بڑھنے کی بھی کوئی حد نہیں۔ ہم چاہے کتنے ہی بڑے عدد مثلاً (۹۷۱۳۲۸۶۲۷) کا تصور کریں ایک وقت ضرور ایسا آئیگا کہ  $n$  اس عدد سے بھی بڑا ہو جائیگا۔

$n$  میں اضافہ کے اس ختم نہ ہونے والے عمل کو تعبیر کرنے کے لیے ہم آسانی کی خاطر ایک مختصر جملہ ” $n$  بے لانتاہی“ یا علامتوں میں ” $n \rightarrow \infty$ “ استعمال کرتے ہیں اور علامت  $\infty$  سے بالعموم لانتاہی کو تعبیر کیا جاتا ہے۔  $n$  کے لانتاہی کی طرف مائل ہونے میں بھی وقت کا تصور پایا جاتا ہے لیکن یہ تصور ہم نے محض اپنی

آسانی کی خاطر اختیار کیا ہے۔ خود متغیر ن کی ذات میں وقت کا کوئی مفہوم نہیں پایا جاتا۔ طالب علم کو یہ بات اچھی طرح ذہن نشین کر لینی چاہیے کہ جملہ "ن" مائل بہ لاتناہی" کو جب ہم استعمال کرتے ہیں تو اس سے ہماری مراد محض یہ ہوتی ہے کہ ن بتدریج ایسی قیمتیں اختیار کر رہا ہے جو بغیر ختم ہونے کے بڑھتی چلی جا رہی ہیں۔ لاتناہی بذاتِ خود کوئی عدد نہیں ہے اور مسادات  $n = \infty$  کے کوئی معنی نہیں کیونکہ "مسادی بہ لاتناہی" ایک بے معنی جملہ ہے۔ علامت  $\infty$  فی نفسہ ایک بے معنی علامت ہے اور صرف "ن مائل بہ  $\infty$ " میں یہ معنی دار ہے اور اس کے وہی معنی ہیں جو ہم نے اوپر بطور تعریف کے مقرر کیے ہیں۔

۱۳۲۔ انتہا کے مفہوم کی توضیح مثالوں کے ذریعہ۔

مثال ۱-  $\frac{1}{n} = \frac{1}{n}$

فرق جتنا ہم چاہیں چھوٹا بنا سکتے ہیں اگرچہ  $\frac{1}{n}$  خود کبھی صفر نہیں ہوتا۔ فرق مخالف ہم کو چاہے کتنا ہی چھوٹا عدد کیوں نہ بیان کرے ہم ایک صحیح عدو ن ایسا معلوم کر سکتے ہیں کہ توازن کا  $n$  واں عدد اور اس کے بعد کے تمام اعداد صہ سے چھوٹے ہوں۔ اس بات کو ہم مختصر طور پر یوں ظاہر کرتے ہیں کہ توازن  $\frac{1}{n}$  کی انتہا صفر ہے جبکہ  $n \rightarrow \infty$  ہو۔

$$\text{مثال ۲ - } \frac{1}{n} - 1 = \frac{1}{n}$$

توازن حسب ذیل ہے :-

$$1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots$$

اس توازن کا ہر عدد اپنے پہلے عدد سے بڑا ہے اور اس لیے یہ ایک صعودی توازن ہے۔ اب اس میں ہم  $n$  کو چاہے کتنا ہی بڑا لیں  $\frac{1}{n}$  ہمیشہ  $1$  سے کم رہتا ہے۔ لیکن ہم اوپر کی مثال میں دیکھ چکے ہیں کہ  $\frac{1}{n}$  کو جتنا چاہیں چھوٹا بنایا جاسکتا ہے اس لیے معلوم ہوتا ہے کہ  $(1 - \frac{1}{n})$  کو ا کے جتنا قریب چاہیں لاسکتے ہیں یعنی  $1 - \frac{1}{n}$  اور ا کا فرق جتنا چاہیں چھوٹا بنا سکتے ہیں۔

$$\text{مثلاً } \{1 - (1 - \frac{1}{n})\} \text{ چھوٹا ہوگا } 10000 \text{ سے اگر } n > 10000$$

یعنی اگر  $n < 10000$  یعنی  $n < 10000$  یا اس سے بڑا صحیح عدد لیا جائے۔

$$\text{اس طرح } \{1 - (1 - \frac{1}{n})\} > \frac{1}{10000} \text{ اگر } n < 10000$$

$$\text{توازن } \frac{1}{n} - 1 = \frac{1}{n} \text{ کی اس خاصیت کو کہ اس کی عام رقم } 1 - \frac{1}{n}$$

کا فرق اسے جس قدر چاہیں چھوٹا بنایا جاسکتا ہے۔ ریاضی کی زبان میں ہم یوں بیان کرتے ہیں کہ "توازن  $1 - \frac{1}{n}$  کی انتہا اسے جبکہ  $n \rightarrow \infty$  ہو۔ اوپر کی دونوں مثالوں کے نتائج کو ہم علامتوں میں اس طرح ظاہر کرتے ہیں۔

$$\text{نہا} \frac{1}{n} = 0$$

$$\text{نہا} \frac{1}{n} = (1 - \frac{1}{n})$$

مثال ۳-  $\frac{1}{n} = \frac{1}{n}$  یہ قوا تر حسب ذیل ہے:-

$$\dots\dots\dots 25 \quad 16 \quad 9 \quad 4 \quad 1$$

اس قوا تر میں ہم دیکھتے ہیں کہ ہر عدد اپنے پیشرو سے بڑا ہے یعنی یہ ایک صعودی قوا تر ہے۔ اب ہم چاہیں کتنا ہی بڑا مثبت عدد (گ) لیں ایک صحیح عدد  $n$  ایسا معلوم ہو سکتا ہے کہ  $\frac{1}{n}$  کی اس قیمت کے لیے اور اس کے بعد کی تمام صحیح قیمتوں کے لیے  $\frac{1}{n} < \text{گ}$  - مثلاً

$$\frac{1}{n} < 1 \dots\dots\dots \text{اگر } \frac{1}{n} \text{ یا اس سے بڑا عدد ہو۔}$$

$$\frac{1}{n} < 1 \dots\dots\dots \text{اگر } \frac{1}{n} \text{ یا اس سے بڑا عدد ہو۔}$$

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{2} \dots\dots\dots \text{اگر } \frac{1}{n} \text{ یا اس سے بڑا عدد ہو۔}$$

غرض کہ ہم چاہے کتنے ہی بڑے عدد کا تصور کریں ایک وقت ایسا آئیگا کہ قوا تر  $\frac{1}{n} = \frac{1}{n}$  بالآخر اس عدد سے بھی بڑا ہو جائیگا۔ یعنی قوا تر  $\frac{1}{n}$  کی کوئی محدود انتہا نہیں ہے۔ اس کو یوں بھی بیان کرتے ہیں کہ قوا تر  $\frac{1}{n}$  کی انتہا  $+\infty$  ہے اور اس طرح لکھتے ہیں

$$\text{نہا} \frac{1}{n} = \infty$$

اس طرح اگر قوا تر  $\frac{1}{n} = -\frac{1}{n}$  یعنی قوا تر

$$\dots\dots\dots 25 \quad -16 \quad -9 \quad -4 \quad -1$$

پر غور کریں تو ہم دیکھتے ہیں کہ اس قوا تر کی رقیں جبرئہ طور پر کم ہوتی جا رہی ہیں اور ہم چاہے کتنا ہی چھوٹا منفی عدد (-گ) لیں  $n$  کو اس طرح انتخاب کیا جاسکتا ہے کہ

$$-\frac{1}{n} > \text{گ} \text{ - سے مثلاً}$$

- ن<sup>۱</sup> > ۱..... اگر ن<sup>۱</sup> ۱۰۰۱ یا اس سے بڑا صحیح عدد ہو۔

- ن<sup>۲</sup> > ۱..... اگر ن<sup>۲</sup> ۱۰۰۱ یا اس سے بڑا صحیح عدد ہو۔

تواتر - ن<sup>۱</sup> کی بھی کوئی محدود انتہا نہیں ہے یا اگر ہم چاہیں تو یوں کہہ سکتے ہیں کہ تواتر - "ن<sup>۱</sup> کی انتہا - ∞" ہے اور اس طرح لکھتے ہیں

$$\infty \leftarrow ( - \text{ن} ) = - \infty$$

یہ محض تعریف ہے جو اختصار کی خاطر اختیار کی گئی ہے ورنہ حقیقت میں ایسی مساواتوں کے کوئی معنی نہیں۔

مثال ۴ - انتہا کے مفہوم کو واضح کرنے کے لیے ایک اچھی مثال کسی لاتناہی سلسلہ کا حاصل جمع ہے محدود سلسلوں مثلاً حسابی یا ہندسی یا موسیقی سلسلوں سے طالب علم کو پہلے سے ہی واقفیت ہے۔  
مثلاً ذیل کا سلسلہ

$$(۱) \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{n}$$

ایک محدود ہندسی سلسلہ ہے جس کا مشترک جز و ضربی  $r = \frac{1}{2}$  ہے۔  
اگر ہم اس ن رقموں والے سلسلہ کے حاصل جمع کو  $\frac{1}{n}$  سے تعبیر کریں تو ہم کو معلوم ہے کہ

$$(۲) \quad \frac{1}{n} = \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2^n}) - 1 = \frac{1}{2^n}$$

سلسلہ (۱) کو اگر ہم ن رقموں پر ختم ہوتا ہوا نہ فرض کریں بلکہ مان لیں کہ یہ سلسلہ اس قاعدہ سے ہمیشہ آگے بڑھتا ہے اور اس کی بے شمار رقمیں ہیں :

$$(۳) \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots$$

تو اس لاتناہی سلسلہ (۳) کی مدد سے ہم کو ایک لاتناہی تواتر ملتا ہے

جسب ذیل ہے :-

$$\frac{1}{1} = \text{پہلی رشم}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \text{پہلی دو رقموں کا مجموعہ}$$

$$\frac{6}{8} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \text{پہلی تین رقموں کا مجموعہ}$$

$$\frac{1-5}{16} = \frac{1}{16} - 1 = \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \text{پہلی ن رقموں کا مجموعہ}$$

یعنی تواتر حسب ذیل ہے :-

$$(۴) \dots\dots \frac{1-5}{16}, \dots\dots \frac{31}{32}, \dots\dots \frac{15}{16}, \dots\dots \frac{7}{8}, \dots\dots \frac{3}{4}, \dots\dots \frac{1}{2}$$

ہم دیکھتے ہیں یہ ایک صعودی تواتر ہے جس کی ہر رقم ۱ سے کم ہے لیکن یہ تواتر بند ریج کے قریب آ رہا ہے گو کبھی اس کا کوئی عدد ۱ کے بالکل مساوی نہیں ہو جاتا۔ لیکن ہم ایک صحیح عدد ن ایسا معلوم کر سکتے ہیں کہ تواتر (۴) میں کے عدد  $\frac{1}{2}$  کا فرق اسے یعنی ۱ -  $\frac{1}{2}$  جس قدر چاہیں چھوٹا ہو جائے۔ بالفاظ دیگر سلسلہ (۳) کی ن رقموں کا مجموعہ ۱ کے جتنا چاہیں قریب ہو جائے۔ مثلاً فرض کر دو کہ ہم معلوم کرنا چاہتے ہیں کہ سلسلہ (۴) کی کتنی رقمیں لی جائیں کہ مجموعہ اسے بقدر  $\frac{1}{100}$  (یعنی ۱ -  $\frac{1}{100}$ ) کے کم ہو۔

$$\text{اب چونکہ } 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}$$

$$\therefore 1 - \frac{1}{100} = (1 - \frac{1}{100}) - 1 = \frac{1}{100}$$

$$\therefore \frac{1}{100} \geq \frac{1}{100}$$

$$\therefore \frac{1}{100} \leq 100 \text{ یعنی } 100 \leq 100 \text{ یعنی } 100 \leq 100$$





طول کے جس قدر چاہیں قریب آجائے پس

نہا ۱ ج = اب = ا -

۱۳۱۔ انتہا کی باضابطہ تعریف — مذکورہ بالا

مثالوں کے ذریعہ انتہا کے مفہوم کی توضیح کرنے کے بعد اب ہم انتہا کی باضابطہ تعریف کریں گے۔

**تعریف ۱** — تواتر  $\lambda$  کی انتہا جبکہ  $n$  مائل بہ لامتناہی ہو  
 $\lambda$  اُس وقت ہوگی جبکہ اگر کوئی اختیاری چھوٹا مثبت عدد  $\epsilon$  دیا ہوا ہو  
 تو ہم ایک ایسا مثبت صحیح عدد  $n$  معلوم کر سکیں کہ تواتر کے رکن  $\lambda_n$  سے شروع کر کے  
 اور بعد کے تمام رکنوں کے لیے  $\lambda$  اور  $\lambda$  کا فرق  $\epsilon$  سے چھوٹا ہو۔ اس صورت میں  
 تواتر  $\lambda$  کو "مستداق" کہتے ہیں۔

$\lambda$  اور  $\lambda$  کے مطلق فرق کو  $|\lambda - \lambda|$  سے تعبیر کرتے ہیں۔

انتہا کی اس تعریف میں دو نکتے بہت اہم ہیں اور طالب علم کو ان پر بخوبی  
 غور کرنا چاہیے۔ اول تو یہ کہ  $\epsilon$  جو چھوٹا مثبت عدد دیا ہوا ہے وہ اختیاری چھوٹا ہے  
 یعنی سوائے بالکل صفر کے ہم  $\epsilon$  کو جتنا چھوٹا چاہیں لے سکتے ہیں۔  $\epsilon$  کی مختلف قیمتیں  
 لینے سے  $n$  کی بالعموم مختلف قیمتیں حاصل ہوتی ہیں اور ہر  $\epsilon$  کے لیے اس کی تعریف  
 میں دی ہوئی خاصیت پائی جانی چاہیے۔ اگر  $\epsilon$  کی بعض قیمتوں کے لیے یہ خاصیت  
 پائی جائے اور بعض قیمتوں کے لیے یہ خاصیت نہ پائی جائے تو  $\lambda$  کی انتہا نہیں  
 ہوگی۔ دوسرے یہ کہ اگر  $\lambda$  سے شروع کرنے کے بعد تواتر کا صرف ایک رکن  
 بھی ایسا پایا جائے کہ اس کا اور  $\lambda$  کا فرق  $\epsilon$  سے چھوٹا نہیں ہے تو انتہا  
 نہیں ہوگی۔  $n$  ایسا معلوم کرنا چاہیے کہ  $\lambda_n$  کے بعد کے تمام ارکان کے  
 لیے  $\lambda$  اور  $\lambda$  کا فرق  $\epsilon$  سے چھوٹا ہو۔ لفظ تمام پر ہم نے اسی لیے  
 زور دیا ہے۔

اس سے ظاہر ہے کہ اگر ہم کسی تواتر  $\lambda$  میں  $n$  کی چند محدود قیمتوں کے لیے

۱ کی قیمت بدل دیں تو اس سے توازن کی انتہا پر کوئی اثر نہیں پڑتا۔ مثلاً ہم کو معلوم ہے کہ توازن  $\frac{1}{1} = \frac{1}{1}$  کی انتہا صفر ہے۔ اب فرض کرو کہ ہم ایک نیا توازن اس طرح حاصل کرتے ہیں:

$$\frac{1}{1} = 100 \text{ جبکہ } 100 = 100' 100'' \dots 100'''$$

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{100} \text{ ' } 100 \text{ ' } 100'' \dots 100''' \text{ کی باقی تمام قیمتوں کے لیے۔}$$

اس توازن کی انتہا بھی صفر ہے۔

لیکن اگر ایک توازن کے لائنیاں ارکان کی قیمت بدل دی جائے تو انتہا کا وہی باقی رہنا ضروری نہیں ہے۔ مثلاً اگر ایک توازن ایسا لیا جائے کہ

$$\frac{1}{1} = 1 \text{ جبکہ } 1 \text{ طاق ہو}$$

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{2} \text{ جبکہ } 1 \text{ جفت ہو}$$

تو اس توازن کی انتہا نہ تو صفر ہے نہ ۱۔

اس کے علاوہ یہ بھی ضروری نہیں ہے کہ توازن کی انتہا توازن کے کسی رکن کی اصلی قیمت کے مساوی ہو۔ گذشتہ دفعہ میں ہم نے مقنی مثالیں دی ہیں ان میں طالب علم نے دیکھا ہوگا کہ توازن کے کسی رکن کی قیمت انتہا کے مساوی نہیں ہے۔ مثلاً توازن  $\frac{1}{1}$  کی انتہا صفر ہے۔ لیکن توازن کا کوئی رکن صفر کے مساوی نہیں ہے۔

البتہ بعض خاص توازن ہا کے لیے یہ ممکن ہے کہ توازن کی انتہا کسی ایک رکن کی قیمت کے مساوی ہو۔ مثلاً فرض کرو کہ ہم ایک توازن اس طرح لیتے ہیں کہ

$$\frac{1}{1} = 0 \text{ جبکہ } 0 = 100' 100'' \dots 100'''$$

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{100} \text{ ' } 100 \text{ ' } 100'' \dots 100''' \text{ کی باقی تمام قیمتوں کے لیے۔}$$

ہم کو معلوم ہے کہ چونکہ اس توازن کے صرف محدود تعداد ارکان کی قیمت بدل دی گئی ہے اس لیے انتہا میں کوئی فرق نہیں آتا اور اس کی انتہا اب بھی

صفر ہے اور تواتر کے چند ارکان کی قیمت بھی صفر ہے۔ یہ ایک خاص صورت ہے لیکن عام تواتر کے لیے ایسا ہونا ضروری نہیں ہے۔

**تعریف ۲۔**  $n$  مائل بہ لاتناہی ہو تو تواتر  $n + \infty$  (مثبت لاتناہی) کی طرف اُس وقت مائل ہوگا جبکہ اگر کتناہی بڑا اختیاری مثبت عدد  $g$  دیا ہوا ہو تو ایک مثبت صحیح عدد  $n$  ایسا معلوم ہو سکے کہ  $n$  سے شروع کر کے اور بعد کے تمام ارکان کی قیمت  $g$  سے بڑی ہو۔  
اس صورت میں ہم یوں لکھتے ہیں کہ

$$n + \infty = \infty \quad \text{یا} \quad n - \infty = \infty \quad \text{جبکہ} \quad n \rightarrow \infty$$

**تعریف ۳۔**  $n$  مائل بہ لاتناہی ہو تو تواتر  $n - \infty$  (منفی لاتناہی) کی طرف اُس وقت مائل ہوگا جبکہ اگر کتناہی بڑا اختیاری مثبت عدد  $g$  دیا ہوا ہو تو ایک مثبت صحیح عدد  $n$  ایسا معلوم ہو سکے کہ  $n$  سے شروع کر کے بعد کے تمام ارکان کی قیمت  $-g$  سے کم ہو۔  
اس صورت میں ہم لکھتے ہیں

$$n - \infty = -\infty \quad \text{یا} \quad n + \infty = -\infty \quad \text{اگر} \quad n \rightarrow -\infty$$

ان دونوں صورتوں میں ہم کہتے ہیں کہ "متسع" ہے "مستحق نہیں ہے"۔

**تعریف ۴۔** اگر کسی تواتر  $n$  کی انتہا نہ تو محدود عدد  $l$  ہو نہ وہ  $+\infty$  یا  $-\infty$  کی طرف مائل ہو تو کہا جاتا ہے کہ تواتر  $n$  اہتزاز کرتا ہے۔  
مثلاً تواتر  $n = (-1)^n$  اور تواتر  $n = (-1)^n + \frac{1}{n}$  اہتزاز کرتے ہیں۔

## توضیحی مثالیں

مثال (۱) :-  $ل = ن$

اس تواتر کے لیے ک کی قیمتوں کے لحاظ سے تین صورتیں پیدا ہوتی ہیں:

(۱) اگر ک کوئی مثبت صحیح عدد یا مثبت کسری عدد ہو مثلاً فرض کرو کہ ک = ۴، اگر ہم چاہیں کہ ن کی قیمت ۱۰۰۰ سے بڑی ہو تو ظاہر ہے کہ ن کے مساوی لینا کافی ہے اور ۱ سے شروع کر کے باقی تمام ارکان ۱۰۰۰ سے بڑے ہیں۔ اگر ہم چاہیں کہ ن کی قیمت ۱۰۰۰۰۰۰۰ سے بڑی ہو تو ن کو ۱۰۱ کے مساوی لینا کافی ہے کیونکہ ۱ سے شروع کر کے باقی تمام ارکان ۱۰۰۰۰۰۰۰ سے بڑے ہیں۔ علیٰ ہذا لقیاس ہم چاہے کتنا ہی بڑا مثبت عدد گ لیں ہم ایک ن ایسا معلوم کر سکتے ہیں کہ  $ل < گ$  جبکہ  $ن \leq ل$ ۔ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ ک کی مثبت قیمتوں کے لیے تواتر  $ل = ن$  کی انتہا  $+\infty$  ہے۔

(ب) اگر ک = ۰ تو  $ل = ن = ۱$  یعنی تواتر کا ہر رکن ۱ کے مساوی ہے اس لیے اس کی انتہا بھی ۱ ہے۔

(ج) اگر ک کوئی منفی صحیح عدد یا منفی کسری ہو تو فرض کرو کہ ک = -۱۔ م جہاں م ایک مثبت عدد ہے۔ پس

$$ل = ن = ۲ = \frac{۱}{ن}$$

چونکہ ہم صورت (۱) میں ثابت کر چکے ہیں کہ کسی مثبت قوت ک کے لیے ک کی انتہا  $+\infty$  ہے پس جس قدر ن بڑھتا جائیگا اُسی قدر ن بھی بڑھتا جائیگا اور اس لیے اسی قدر  $\frac{۱}{ن}$  چھوٹا ہوتا جائیگا۔

فرض کرو کہ ہم  $\frac{۱}{ن}$  کو  $\frac{۱}{۱۰۰۰۰۰۰}$  سے چھوٹا کرنا چاہتے ہیں۔

$$پس \quad ن < \frac{۱}{\frac{۱}{۱۰۰۰۰۰۰}}$$

یعنی  $n < (1 \dots \dots \dots)$  کاموں جذر  
غرض کہ ہم  $n$  کو اس طرح انتخاب کر سکتے ہیں کہ  $\frac{1}{n}$  جتنا چاہیں چھوٹا ہو جائے  
جس سے معلوم ہوتا ہے کہ  $\frac{1}{n}$  یعنی  $n$  کی انتہا صفر ہے اگر  $k$  کوئی  
منفی عدد ہو۔

مثال ۲-  $\frac{1}{n} = 1 + \left\{ \frac{\frac{n}{2}}{n} \right\}$   
ہم کو معلوم ہے کہ چاہے زاویہ طہ کچھ ہی ہو جب طہ کی مطلق قیمت کبھی  
اسے نہیں بڑھ سکتی۔ پس تواتر  $\frac{1}{n}$  حسب ذیل دو تواتروں کے درمیان واقع  
ہوتا ہے

۱-  $\frac{1}{n} \geq 1 + \frac{\frac{n}{2}}{n}$   
چونکہ دونوں تواتروں ۱-  $\frac{1}{n}$  اور  $1 + \frac{1}{n}$  کی انتہا ۱ ہے  
اس لیے درمیانی تواتر  $\frac{1}{n}$  کی انتہا بھی ۱ ہونی چاہیے۔ یہ اس طرح سے  
بھی ظاہر ہے کہ جب  $\frac{\frac{n}{2}}{n}$  کی مطلق قیمت کو ہم جتنا چاہیں چھوٹا کر سکتے  
ہیں کیونکہ یہ قیمت  $\frac{1}{n}$  کے مساوی یا اس سے کم ہے۔

مثال ۳-  $\frac{1}{n} = \{ (1-) + 1 \}$

چونکہ  $(1-) = 1 -$  اگر  $n$  طاق عدد  
 $1 + =$  اگر  $n$  جفت عدد

اس لیے

$\frac{1}{n} = 0$  اگر  $n$  طاق عدد  
 $\frac{1}{n} = 2$  اگر  $n$  جفت عدد

ظاہر ہے کہ تواتر کی انتہا  $+\infty$  نہیں ہے کیونکہ لاتنا ہی ارکان

صفر ہیں - نیز تواتر کی انتہا -  $\infty$  یا محدود عدد بھی نہیں اس لیے معلوم ہوتا ہے کہ تواتر بہت سزا کرتا ہے -

## مشقی سوالات ۲

ذیل کے تواتروں کی انتہا معلوم کرو جبکہ  $n$  مائل بہ لاتنا ہی ہو -

$$(۱) \quad \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty}$$

$$(۲) \quad \frac{n}{1} = \frac{\infty}{1}$$

$$(۳) \quad \frac{n}{n} = \frac{n}{n} \quad \text{جب } n \text{ طہ} \quad \frac{n}{n} = \frac{n}{n} \quad \text{جب } n \text{ طہ} \quad \frac{n}{n} = \frac{n}{n} \quad \text{جب } n \text{ طہ}$$

$$(۴) \quad \frac{n}{n} = \frac{n}{n} \quad \text{جب } n \text{ طہ} \quad \frac{n}{n} = \frac{n}{n} \quad \text{جب } n \text{ طہ} \quad \frac{n}{n} = \frac{n}{n} \quad \text{جب } n \text{ طہ}$$

$$(۵) \quad \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty}$$

$$(۶) \quad \frac{n}{n} = \frac{n}{n}$$

$$(۷) \quad \frac{n}{n} = \frac{n}{n}$$

(۸)  $n$  کی وہ کم سے کم قیمت معلوم کرو جس کے لیے  $n + n < \infty$

۴۱ - انتہا کے متعلق عام مسائل

۴۱ - مسئلہ ۱ - اگر تواتر  $n$  کی انتہا  $L$  ہو تو  $n$  کی کافی بڑی قیمتوں کے لیے ہم لکھ سکتے ہیں

$$\text{کچ} = \text{ل} + \text{ک} \quad \text{..... (۱۱)}$$

جہاں کچ کو چھ جتنا چاہیں چھڑا بنا سکتے ہیں یعنی جہاں تو اتر کچ کی انتہا صفر پر ہے۔  
فرض کرو کہ صد کو کوئی اختصار ہی چھڑا دیا ہو اعداد سے۔ اب

$$\text{اے} = \text{ا} + \text{ع} - \text{ل} \quad \text{..... (۱۲)}$$

لیکن چونکہ  $\text{ا} + \text{ع} - \text{ل}$  انتہا ہے اس لیے تعریف کے بموجب ایک مثبت عدد صحیح عدد  $\text{ا} + \text{ع} - \text{ل}$  پر مجموعہ ہو سکتا ہے لچ اور اے کے تمام اعداد سے  
 $\text{ا} + \text{ع} - \text{ل} > \text{ا} + \text{ع} - \text{ل}$  یہ کچ اور بعد کے تمام کچ کے لیے  
 $\text{ا} + \text{ع} - \text{ل} > \text{ا} + \text{ع} - \text{ل}$

$$\text{ب} = \text{ب} - \text{ا} > \text{ب} \quad \text{..... (۱۳)}$$

پس تعریف کے بموجب تو  $\text{ب} - \text{ا}$  کچ کی انتہا صفر پر ہے۔  
اس مسئلہ کی مدد سے  $\text{ب} - \text{ا}$  تو اتروں کے حامل جسج، فوقی، حامل ضرب اور خارج قسمت کی انتہا  $\text{ب} - \text{ا}$  کے ساتھ معلوم کر سکتے ہیں۔ لیکن ان میں ہمیں اجماعی باتیں ہی ہیں۔ مسئلہ کی بھی ضرورت ہوتی ہے جس کو ہم یہاں جیات دیتے ہیں۔

$$\text{۱۳۲۔} \quad \text{مسئلہ ۲} \quad \text{اگر } \text{ا} \text{ اور } \text{س} \text{ کوئی مثبت یا منفی حقیقی}$$

عدد ہیں تو

$$\text{ا} + \text{س} > \text{ا} + \text{س} \quad \text{..... (۱۴)}$$

یعنی اعداد میں  $\text{ا} + \text{س}$  نے مجموعہ کی مطلق قیمت ان کی علیحدہ علیحدہ مطلق قیمتوں کے مجموعہ سے کسی سمت میں بڑی نہیں ہو سکتی بلکہ تو مساوی



ہوگی یا کم ہوگی۔ اس پر یہی مسئلہ کہ ہم مثالوں کے ذریعہ سے واضح کرینگے۔ فرض کرو کہ

$$r = \frac{11}{3}, \text{ اور } s = -\frac{25}{9} \text{ تب}$$

$$r + s = \left| \frac{11}{3} - \right| = \left| -\frac{25}{9} - \frac{11}{3} \right| = \left| s + r \right|$$

اور

$$\frac{78}{9} = \frac{25}{9} + \frac{11}{3} = \left| \frac{25}{9} - \right| + \left| \frac{11}{3} \right| = \left| s \right| + \left| r \right|$$

$$\frac{78}{9} > \frac{2}{9} \text{ چونکہ}$$

اس لیے اس صورت میں  $|r + s| > |r| + |s|$  اور مسئلہ صحیح ہے۔

اب فرض کرو کہ  $r = \frac{11}{3}, s = \frac{25}{9}$  اس لیے

$$\frac{78}{9} = \left| \frac{78}{9} \right| = \left| \frac{25}{9} + \frac{11}{3} \right| = \left| s + r \right|$$

$$\frac{78}{9} = \frac{25}{9} + \frac{11}{3} = \left| \frac{25}{9} \right| + \left| \frac{11}{3} \right| = \left| s \right| + \left| r \right| \text{ اور}$$

اس لیے اس صورت میں  $|r + s| = |r| + |s|$  اور اب بھی مسئلہ صحیح ہے۔

بالآخر اگر  $r = -\frac{11}{3}$  اور  $s = -\frac{25}{9}$  تو

$$r + s = \left| \frac{78}{9} - \right| = \left| \frac{25}{9} - \frac{11}{3} - \right| = \left| s + r \right|$$

$$\frac{78}{9} = \frac{25}{9} + \frac{11}{3} = \left| \frac{25}{9} - \right| + \left| \frac{11}{3} - \right| = \left| s \right| + \left| r \right|$$

اس صورت میں بھی  $|r + s| = |r| + |s|$

پس ہم دیکھتے ہیں کہ اگر  $r$  اور  $s$  دونوں مثبت یا دونوں منفی ہیں تو

$$|r + s| = |r| + |s| \text{ لیکن اگر } r \text{ اور } s \text{ میں سے کوئی ایک منفی}$$

اور دوسرا مثبت ہے تو  $|r + s| < |r| + |s|$

۳۳۔ مسئلہ ۳۔ اگر ایک توانر کی انتہا ۱ اور

دوسرے قوا تر بن کی انتہا ب ہو تو قوا تر (ل + بن) کی انتہا (ل + ب) ہوگی۔

فرض کرو کہ صہ کوئی دیا ہوا چھوٹا مثبت عدد ہے۔ تب چونکہ ل کی انتہا ل ہے اس لیے ایک صحیح عدد ن ایسا معلوم ہو سکتا ہے کہ

$$|ل - ل| > \frac{صہ}{۲} \quad \text{جبکہ } ن \leq ل \quad \dots\dots\dots (۱)$$

اس طرح چونکہ بن کی انتہا ب ہے اس لیے ایک صحیح عدد ن ایسا معلوم ہو سکتا ہے کہ

$$|ب - بن| > \frac{صہ}{۲} \quad \text{جبکہ } ن \leq بن \quad \dots\dots\dots (۲)$$

ن اور بن میں سے جو عدد بڑا ہو اس کو ہم ن سے تعبیر کرتے ہیں۔ تو ظاہر ہے کہ ن اور اس سے بڑی قیمتوں کے لیے (۱) اور (۲) بیک وقت پورے ہوتے ہیں۔

اب مسئلہ (۲) کی رُو سے ہم دیکھتے ہیں کہ ن کی ہر قیمت کے لیے

$$|(ل + بن) - (ل + ب)| = |(ل - ل) + (بن - ب)|$$

$$\geq |ل - ل| + |بن - ب|$$

اس لیے مساواتوں (۵) اور (۶) سے ظاہر ہے کہ

$$|(ل + بن) - (ل + ب)| > \frac{صہ}{۲} + \frac{صہ}{۲}$$

$$> صہ \quad \text{جبکہ } ن \leq بن$$

پس تعریف کے بموجب

$$ن \leftarrow (ل + بن) = ل + ب$$

اس مسئلہ کو الفاظ میں ہم یوں بیان کر سکتے ہیں کہ دو قوا تروں کے

حاصل جس کی انتہا دونوں کی انتہاؤں کے مجموعہ کے مساوی ہوتی ہے -  
 اس مسئلہ کا ایک زیادہ مختصر ثبوت جو اگرچہ اس قدر مکمل نہیں ہے حسب ذیل ہے :-  
 چونکہ لُج کی انتہا لُہ ہے اس لیے ن کی کافی بڑی قیمتوں کے لیے

$$لُج = لُ + صم$$

اس طرح

$$بج = ب + صم$$

جہاں صم اور صم کو ہم مسئلہ (۱) کی بناء پر جتنا چاہیں چھوٹا کر سکتے ہیں۔ پس

$$لُج + بج = (لُ + صم) + (ب + صم) = (لُ + ب) + (صم + صم)$$

اس لیے

$$| (لُج + بج) - (لُ + ب) | = | صم + صم |$$

کیونکہ صم + صم کو ہم جتنا چاہیں چھوٹا کر سکتے ہیں۔ جس سے مسئلہ ظاہر ہے -

مثال ۱- فرض کرو کہ لُج =  $\frac{1}{n}$ ، بج =  $\frac{1}{2n}$ ، پس لُج + بج =  $\frac{1}{n} + \frac{1}{2n}$

$$لُج \leftarrow ب \leftarrow \text{اور لُج + بج} \leftarrow$$

لُج + بج کی انتہا صفر ثابت کرنے کے لیے ہم کوئی عدد صم جتنا چاہیں چھوٹا لیتے

ہیں۔ اب

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{2n} > صم \text{ اگر } \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} - صم > 0 \text{ یعنی اگر } 1 + \frac{1}{2} - 2 \times صم > 0$$

$$\text{یعنی اگر } 2 \times صم < 1 + \frac{1}{2} = 1.5$$

پس مساوات ۲ صہ ن' - ۲ ن - ۱ = ۰ سے ن کی جو مثبت قیمت حاصل ہوتی ہے اس سے بڑی صحیح قیمت لی جائے تو اس سے شروع کر کے بعد کے تمام ن کے لیے  $\frac{1}{ن} + \frac{1}{۲ن} > ۰$  صہ اس لیے ثابت ہوا کہ  $\frac{1}{ن} + بن$  کی انتہا صفر جو دونوں انتہاؤں کے مجموعہ کے مساوی ہے۔

$$\text{مثال ۲ - } \frac{1}{ن} = (۱ - \frac{1}{ن}) \text{ بن} = (\frac{1}{۲ن} - \frac{1}{۴})$$

$$\frac{1}{ن} + بن = \frac{۳}{۴} - (\frac{1}{۲ن} + \frac{1}{ن})$$

اب ظاہر ہے کہ  $\frac{1}{ن} \leftarrow ۰$  بن  $\leftarrow \frac{1}{۴}$

اور

$$\frac{۳}{۴} - (\frac{1}{ن} + بن) = \frac{1}{۲ن} + \frac{1}{ن}$$

ابھی مثال ۱ میں ہم نے ثابت کیا ہے کہ ہم ایک ن ایسا معلوم کر سکتے ہیں کہ اس سے شروع کر کے اور بعد کے تمام ن کے لیے

$$\frac{1}{ن} + \frac{1}{۲ن} > ۰ \text{ صہ جہاں صہ کوئی چھوٹا عدد ہے۔}$$

پس اس ن کے لیے اور بعد کے تمام ن کے لیے  $\frac{۳}{۴}$  اور  $(\frac{1}{ن} + بن)$  کا فرق صہ سے کم ہے اس لیے تعریف کے بموجب  $(\frac{1}{ن} + بن)$  کی انتہا  $\frac{۳}{۴}$  ہے جو  $\frac{1}{ن}$  اور بن کی انتہاؤں کے مجموعہ کے مساوی ہے۔  
اوپر کی دونوں مثالوں سے مسئلہ ۳ کی تصدیق ہوتی ہے۔

نوٹ ۱ - اوپر جو ثبوت ہم نے دو تواتروں کے لیے دیا ہے اس کو آسانی سے تین یا زیادہ تواتروں کے لیے وسیع کیا جاسکتا ہے جس سے ظاہر ہے کہ یہ مسئلہ تواتروں کی کسی محدود تعداد کے لیے صحیح ہے۔ لیکن تواتروں کی لامتناہی تعداد کے لیے یہ مسئلہ صحیح نہیں رہتا۔

مثلاً تواتروں

$$\frac{1}{n} \quad \frac{2}{n} \quad \frac{3}{n} \quad \dots \quad \frac{n}{n}$$

پر غور کرو۔ ان میں سے ہر قوتار کی انتہا صفر ہے اس لیے انتہاؤں کا مجموعہ بھی صفر ہے چاہے  $n$  کوئی عدد ہو۔ لیکن اگر ان قوتاروں کا مجموعہ لیا جائے تو

$$\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{n}{n} = \frac{1+2+\dots+n}{n} = \frac{(1+n)(n+1)/2}{n} = \frac{(1+n)(n+1)}{2n}$$

اودھا ہے کہ اس مجموعہ کی انتہا  $\frac{1}{2}$  ہے۔ یعنی مجموعہ کی انتہا، انتہاؤں کے مجموعہ کے مساوی نہیں ہے۔ اس کی وجہ یہ ہے کہ جب ہم مجموعے کی انتہا لیتے ہیں یعنی  $n$  کو بہت بڑا کرتے ہیں تو چونکہ قوتاروں کی تعداد  $n$  ہے اس لیے یہ تعداد بھی لا اعتبار ہو جاتی ہے۔  
نوٹ ۲۔ بعینہ اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ دو قوتاروں کے فرق کی انتہا، انتہاؤں کے فرق کے مساوی ہوتی ہے یعنی

$$\text{نہا} (ل - ب) = ل - ب$$

۴۴ و ۱۔ مسئلہ ۴۔ اگر قوتار  $ل$  کی انتہا  $ل$  اور قوتار  $ب$  کی انتہا

$ب$  ہو تو قوتار  $(ل - ب)$  کی انتہا  $ل - ب$  ہوگی، یعنی دو قوتاروں کے حاصل ضرب کی انتہا، انتہاؤں کے حاصل ضرب کے مساوی ہوگی۔

چونکہ  $ل$  کی انتہا  $ل$  ہے اور  $ب$  کی انتہا  $ب$  ہے اس لیے  $n$  کی کافی بڑی قیمتوں کے لیے مسئلہ (۱) کی رو سے

$$ل = ل + ص \quad \text{جہاں } ص \text{ نہی ص} = ۰$$

$$ب = ب + ص \quad \text{جہاں } ص \text{ نہی ص} = ۰$$

$$\therefore ل - ب = (ل + ص) - (ب + ص) = ل - ب + (ص - ص) = ل - ب$$

$$\therefore |ل - ب| = |ل + ص - ب - ص| = |ل - ب|$$

اب چونکہ صم اور صم کی انتہا صفر ہے اس لیے ہم ن کی ایک کافی بڑی قیمت ن ایسی معلوم کر سکتے ہیں کہ اگر صہ کوئی اختیار سی چھوٹا مثبت عدد دیا ہو ا ہو تو

$$| \text{صم پ} + \text{صم ل} + \text{صم صم} | > \text{صہ}$$

پس

ا ل ن بن - ا ب | > صہ جبکہ ن < ن  
یعنی ایک ن سے شروع کر کے بعد کے تمام ن کے لیے ا ب اور  
ا ب کا فرق صہ سے چھوٹا ہے اس لیے انتہا کی تعریف کی رو سے ا ل ن کی  
انتہا ا ب ہے۔ اس سے مسئلہ ثابت ہو جاتا ہے۔

نوٹ - مسئلہ ۳ کی طرح اس مسئلہ کو بھی دو سے زیادہ قوتوں کے لیے  
وسیع کیا جاسکتا ہے، یعنی قوتوں کی کسی تعداد کے حاصل ضرب کی انتہا  
انتہاؤں کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔

$$\text{مثال - ل} = \left( \frac{1}{ن} - \frac{1}{۲} \right) \text{ بن} = \frac{۱ - \frac{۲}{ن}}{۲} = \left( \frac{۱}{۲} - \frac{۳}{۲ن} \right)$$

$$\text{ل بن} = \left( \frac{1}{ن} - \frac{1}{۲} \right) \left( \frac{1}{ن} - \frac{۳}{۲} \right) = \frac{۱}{ن} - \frac{۳}{۲ن} - \frac{۱}{۲ن} + \frac{۳}{۴}$$

$$\text{لیکن چونکہ } \frac{۳}{۲ن} \leftarrow ۰, \frac{۱}{۲ن} \leftarrow ۰, \frac{۱}{۲ن} \leftarrow ۰$$

$$\text{اس لیے ل بن} \leftarrow \frac{۳}{۴} = \frac{۱}{۲} \times \frac{۳}{۲}$$

۱۴۵- مسئلہ ۵- اگر قوت ل کی انتہا ل ہو اور ل کی  
قیمت صفر نہ ہو تو قوت ل کی انتہا ل ہوگی۔

چونکہ ل کی انتہا ل ہے اس لیے ن کی کافی بڑی قیمت کے لیے

$$\text{ل} = \text{ل} + \text{صم} \quad \text{جہاں } \text{صم} \leftarrow ۰$$

اس لیے

$$\frac{\frac{ص}{ص+ص}}{\frac{ص}{ص+ص}} = \frac{ص-ص}{ص+ص} = \frac{ص}{ص} - \frac{ص}{ص+ص} = \frac{ص}{ص} - \frac{ص}{ص+ص}$$

$$\therefore \left| \frac{ص}{ص+ص} \right| = \left| \frac{ص}{ص} - \frac{ص}{ص+ص} \right|$$

اب چونکہ ص کی انتہا صفر ہے اس لیے ص کی ایک قیمت ص کی معلوم ہو سکتی ہے کہ ص سے شروع کر کے باقی تمام ص کے لیے  $\left| \frac{ص}{ص+ص} \right| > ص$  جہاں ص کوئی اختیاری چھوٹا عدد ہے۔ پس

$$\left| \frac{ص}{ص} - \frac{ص}{ص+ص} \right| > ص \text{ جبکہ } ص \leq ص$$

یعنی تعریف کے بموجب  $\frac{ص}{ص}$  کی انتہا  $\frac{ص}{ص}$  ہے۔

$$\text{مثال - فرض کرو کہ } \frac{ص}{ص} = \frac{ص}{ص} - \frac{ص}{ص} = \frac{ص-ص}{ص} = \frac{ص-ص}{ص}$$

$$\left\{ \frac{ص+ص-ص}{ص-ص} \right\}^2 = \frac{ص}{ص-ص}^2 = \frac{ص}{ص-ص} = \frac{ص}{ص}$$

$$\frac{ص}{ص-ص} + ص = \frac{ص}{ص-ص}^2 + \frac{ص-ص}{ص-ص} =$$

$$\frac{ص}{ص} = \frac{ص}{ص} = \left( \frac{ص}{ص} - \frac{ص}{ص} \right) = \frac{ص}{ص}$$

$$\frac{ص}{ص} = \frac{ص}{ص} = \left( \frac{ص}{ص} + ص \right) = \frac{ص}{ص}$$

۴۶/۱ - مسئلہ ۶ - اگر تواتر  $\frac{ص}{ص}$  کی انتہا  $\frac{ص}{ص}$  اور تواتر  $\frac{ص}{ص}$  کی

انتہا  $\frac{ص}{ص}$  ہو اور  $\frac{ص}{ص} \neq \frac{ص}{ص}$  تو تواتر  $\frac{ص}{ص}$  کی انتہا  $\frac{ص}{ص}$  ہوگی، یعنی دو تواتروں کے خارج قسمت کی انتہا، انتہاؤں کے خارج قسمت کے مساوی ہوگی۔

اس کا ثبوت مسئلہ (۴) اور مسئلہ (۵) کی مدد سے باسانی مل سکتا ہے۔

چونکہ  $\frac{1}{n} \neq 0$  (۰ ≠)

اس لیے  $\frac{1}{n} \neq \frac{1}{n}$  (مسئلہ (۵) کی مدد سے)

اب چونکہ  $\frac{1}{n} \neq \frac{1}{n}$  اور  $\frac{1}{n} \neq \frac{1}{n}$

اس لیے

$\frac{1}{n} \times \frac{1}{n} = \left\{ \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} \right\}$  (مسئلہ (۴) کی مدد سے)  
جس سے مسئلہ ثابت ہو جاتا ہے۔

مثال۔ فرض کرو کہ  $\frac{1}{n} - \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$  ؛  $\frac{1}{n} - \frac{3}{n} = \frac{1}{n}$

پس  $\frac{1}{n} \neq \frac{1}{n} = \left( \frac{1}{n} - \frac{3}{n} \right) \div \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \right) = \left( \frac{1-3}{n} \right) \div \left( \frac{1-n}{n} \right)$

$\frac{1-3}{n-1} = \frac{1-3}{(1-n)n} = \frac{1-n}{n-1} \times \frac{1-3}{n} =$

$\frac{\frac{1}{n} - 3}{\frac{n}{n} - 1} = \frac{\left( \frac{1}{n} - 3 \right) n}{(n - 1) n}$

پس  $\frac{1}{n} \neq \frac{1}{n} = \frac{3}{n} = \frac{3}{n} \div \frac{1}{n}$

مشقی سوالات ۳

ذیل کے قوتروں کی انتہا ہمیں دریافت کرو۔



$$(۱) \quad \frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^1}$$

$$(۲) \quad \frac{1 + 2^n}{5 + 2^n - 2^n}$$

$$(۳) \quad \frac{n + \dots + 3 + 2 + 1}{2(1 - n)}$$

$$(۴) \quad \frac{2^n + \dots + 2^2 + 2^1}{2^n}$$

$$(۵) \quad \frac{2^n + \dots + 2^2 + 2^1}{2^n}$$

$$(۶) \quad (-1)^n + 2^n$$

$$(۷) \quad \dots + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^1} + 1 \text{ لانتاری سلسلہ}$$

کا حاصل جمع دریافت کرو۔

$$(۸) \quad \dots + \frac{3}{1000} + \frac{3}{100} + \frac{3}{10} + \frac{3}{1} \text{ لانتاری سلسلہ}$$

کا حاصل جمع دریافت کرو۔

### ۴۴۱۔ نوٹ۔ استدقاق کا عام اصول۔

مندرجہ بالا آسان مثالوں میں جن کا ہم نے خاص طور پر انتخاب کیا ہے تو اتر جس انتہا کی طرف مائل ہوتا ہے وہ انتہا محض دیکھنے سے واضح ہو جاتی ہے۔ لیکن عام صورت میں یہ سوال اس قدر آسان نہیں ہے اور ایک دیکھے ہوئے تو اتر کے متعلق یہی بات دریافت طلب اور اہم ہوتی ہے کہ آیا اس تو اتر کی کوئی انتہا بھی ہے یا نہیں۔ دفعہ ۳۱ میں انتہا کی جو تعریف دی گئی ہے وہ اس وقت کام دیتی ہے جبکہ ہم کو کسی طریقہ سے انتہا کی قیمت معلوم ہو۔ عام تو اتر کے

استدقاق یا عدم استدقاق کے دریافت کرنے کے لیے یہ تعریف معیار کا کام نہیں دے سکتی بلکہ اس کے لیے مسبب ذیل خاصیت سے فائدہ اٹھایا جاتا ہے :-  
فرض کرو کہ قواعد

(۱) ..... 'ل' 'ل' 'ل' .....  
مستدق ہے اور اس کی انتہا ل ہے۔ یہاں ل کی ٹھیک قیمت سے بحث نہیں اور اس لیے ل کا معلوم ہونا ضروری نہیں ہے کوئی حرف اس کام کو پورا کر سکتا ہے۔  
اب اگر صہ کوئی اختیاری چھٹا مثبت عدد دیا ہوا ہو تو تعریف کے بموجب ایک مثبت صحیح عدد ن ایسا معلوم ہو سکتا ہے کہ ل سے شروع کر کے باقی تمام ارکان کے لیے ل اور ل کا فرق صہ سے چھٹا ہو یعنی

$$(۲) \quad |ل - ل| > \frac{ص}{۲} \dots \dots \dots$$

$$اور \quad |ل - ل| > \frac{ص}{۲} \quad |ل - ل| > \frac{ص}{۲} \quad |ل - ل| > \frac{ص}{۲} \dots (۳)$$

$$پس \quad |ل - ل| - |ل - ل| = |ل - ل|$$

$$> |ل - ل| + |ل - ل|$$

$$> \frac{ص}{۲} + \frac{ص}{۲}$$

اسی طرح ثابت کیا جاسکتا ہے کہ

$$|ل - ل| > \frac{ص}{۲}$$

$$|ل - ل| > \frac{ص}{۲}$$

$$|ل - ل| > \frac{ص}{۲} \quad \text{جہاں م کوئی مثبت صحیح عدد ہے چاہے کتنا ہی بڑا ہو۔}$$







پیمض میں اتفاق ہے جو صرف چند خاص قسم کے تفاعلوں کے لیے واقع ہوگا جن کی ہم آئندہ تخصیص کر بیٹھیں گے۔ عام طور پر یا تو ت (ج) کی قیمت غیر معین ہوگی یا ل سے مختلف ہوگی۔

دوسری اہم بات جو انتہا کی تعریف میں یاد رکھنی چاہیے یہ ہے کہ نقطہ لا کو نقطہ ج کی طرف سیدھی یا بائیں طرف جب صر سے چاہیں لاسکتے ہیں ہر صورت میں وہی انتہا ل حاصل ہونی چاہیے۔

مثال ۱۔ ت (لا) = ۳ لا ۳ ج = ۱۵ ل = ۶۵۵

یعنی تفاعل ۳ لا کی انتہا جبکہ لا ← ۱۵ پر ۶۵۵ ہے۔  
اس کو ہم یوں ثابت کر سکتے ہیں کہ (۶۵۵ - ۳ لا) جتنا چاہیں چھوٹا ہو سکتا ہے بلکہ لا کو ۱۵ کے کافی قریب لیا جائے مثلاً فرض کرو کہ ہم کو ان دونوں کا فرق ص ۵ چھوٹا کرنا چاہیے جہاں ص کوئی چھوٹا مثبت عدد ہے۔ ہم دریافت کر سکتے ہیں کہ ۱۵ کے قریب لا کی کونسی قیمت لی جائے کہ ۶۵۵ - ۳ لا کا فرق ص سے چھوٹا ہو جائے؟ فرض کرو کہ لا = ۱۵۔ ۱۵ تو گویا دریافت کرنا یہ ہے کہ ص زیادہ زیادہ کس قدر ہو سکتا ہے کہ (۶۵۵ - ۳ لا) > ص؟

پس

$$۶۵۵ - ۳(۱۵ - ص) > ص$$

$$یعنی ۶۵۵ - ۳ ص > ص$$

یعنی

$$۶۵۵ - ۳ ص > ص$$

$$۶۵۵ > ۴ ص$$

$$\left\{ \frac{۶۵۵}{۴} - ۱۱۳.۷۵ \right\} > \left\{ \frac{۶۵۵}{۴} - ۱۱۳.۷۵ + ۳ - ص \right\}$$

اس کے لیے ظاہر ہے کہ  $\frac{3 - 9\frac{1}{2}}{2} - 3$  سے کم ہونا چاہیے

یعنی اگر لا کو ہم ۱۵ -  $\frac{3 - 9\frac{1}{2}}{2}$  کے درمیان کچھ ہی لیں  
(۵ - ۳ لا) کا فرق ص سے کم ہو گا۔ ص جس قدر چھوٹا ہوتا ہے ہر بھی  
چھوٹا ہوتا چلا جاتا ہے لیکن پھر بھی ص صفر سے مختلف ہوتا ہے۔ پس

$$\text{نہا} \quad 3 \text{ لا} = 15 - 6.5$$

اس خلاص مثال میں تفاعل ۳ لا کی قیمت نقطہ لا =  $15 \div 3 = 5$  (۱۵) = ۵  
یعنی اس مثال میں انتہا اور قیمت دونوں ایک ہی ہیں۔

$$\text{مثال ۲۔} \quad \frac{9 - 3\frac{1}{2}}{3 - 1\frac{1}{2}}$$

نقطہ لا = ۳ پر تفاعل  $\frac{9 - 3\frac{1}{2}}{3 - 1\frac{1}{2}}$  کی قیمت صفر ہو جاتی ہے جو  
غیر معین ہے کیونکہ صفر کا حاصل کوئی محدود عدد ہو سکتا ہے اس لیے  
کہ چاہے کسی محدود عدد کو صفر سے ضرب دیا جائے حاصل ضرب صفر ہی ہو گا۔

اب ہم  $\frac{9 - 3\frac{1}{2}}{3 - 1\frac{1}{2}}$  کی انتہا دریافت کرتے ہیں جبکہ متغیر لا نقطہ ۳ کے  
قریب پہنچتا ہے۔ اس کے لیے ہم لا کی ایسی قیمتیں رکھتے ہیں جو بتدریج  
۳ کے قریب آتی ہیں اور ان کے جواب میں  $\frac{9 - 3\frac{1}{2}}{3 - 1\frac{1}{2}}$  کی قیمتوں پر  
غور کرتے ہیں۔ مثلاً

$$\begin{array}{l|l} \text{اگر لا} = 2.5 \text{ تو } 5.5 = 9 - 3.5 & \text{اگر لا} = 2.9999 \text{ تو } 5.9999 = 9 - 3.5 \\ \text{اگر لا} = 2.9999 \text{ تو } 5.9999 = 9 - 3.5 & \text{اگر لا} = 2.999999 \text{ تو } 5.999999 = 9 - 3.5 \\ \text{اگر لا} = 2.999999 \text{ تو } 5.999999 = 9 - 3.5 & \text{اگر لا} = 2.99999999 \text{ تو } 5.99999999 = 9 - 3.5 \end{array}$$

وغیرہ۔

اسی طرح اگر ہم لا کی ایسی قیمتیں لیں جو سیدھی طرف سے ۳ کے قریب آتی ہیں تو

منا ہے۔

$$\begin{array}{l} \text{اگر } لا = ۳ر۱ \text{ تو } ما = ۶ر۱ \quad | \quad \text{اگر } لا = ۳ر۰۰۰۱ \text{ تو } ما = ۶ر۰۰۰۱ \\ \text{اگر } لا = ۳ر۰۱ \text{ تو } ما = ۶ر۰۱ \quad | \quad \text{اگر } لا = ۳ر۰۰۰۰۱ \text{ تو } ما = ۶ر۰۰۰۰۱ \\ \text{اگر } لا = ۳ر۰۰۰۱ \text{ تو } ما = ۶ر۰۰۰۱ \quad | \quad \text{اگر } لا = ۳ر۰۰۰۰۰۱ \text{ تو } ما = ۶ر۰۰۰۰۰۱ \end{array}$$

وغیرہ

اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ چاہے لا بائیں طرف سے یا بیڑی طرف سے ۳ کی طرف مائل ہو  $\frac{۹-لا}{۳-لا}$  کی قیمت ۶ کے قریب آتی جا رہی ہے اور اگر ہم لا کو ۲ کے کافی قریب لیں تو  $\frac{۹-لا}{۳-لا}$  کو ۶ کے جس قدر چاہیں قریب لاسکتے ہیں پس معلوم ہوتا ہے کہ انتہا ۶ ہے یعنی

$$۶ = \frac{۹-لا}{۳-لا}$$

اس انتہا کو ہم دوسری طرح یوں معلوم کر سکتے ہیں:-  
اگر ہم لا کو بالکل ۳ کے مساوی رکھیں تو ہم نے دیکھا ہے کہ تفاضل

ما کی قیمت  $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$  حاصل ہوتی ہے جو بے معنی ہے اس لیے ہم لا کو ۳ سے کسی قدر مختلف رکھتے ہیں مثلاً لا = ۳ + ۱ جہاں ۱ مثبت یا منفی کوئی چھوٹا عدد ہے ظاہر ہے کہ جب لا مائل بہ ۳ ہو تو وہ مائل بہ صفر ہوتا ہے۔ نیز چونکہ لا کی قیمت کبھی بالکل ۳ کے مساوی نہیں ہوتی اس لیے کبھی بالکل صفر کے مساوی نہیں ہوتا۔

$$\text{پس } ۶ = \frac{۹-لا}{۳-لا} = \frac{۹-(۳+۱)}{۳-(۳+۱)} = \frac{۹-۴}{۳-۴} = \frac{۵}{-۱} = -۵$$

اب ۵ کو کافی چھوٹا کرنے یعنی لا کو ۳ کے کافی قریب لانے سے ہم ما کو جس قدر چاہیں ۶ کے قریب لاسکتے ہیں جس سے معلوم ہوتا ہے کہ ما کی انتہا ۶ ہے جبکہ لا  $\leftarrow ۳$  ہو۔



$$\text{مثال ۳۔} \quad \frac{\overline{۱-۱۱} - \overline{۱۱-۱۱}}{\overline{۱۱-۱۱}} \quad \frac{۱}{۱}$$

اگر تفاعل ف (۱) = ۱ = م

۲ رکھا جائے تو اس کی قیمت بھی صفر ہو جاتی ہے اس لیے ف (۱) کی قیمت نقطہ ۲ پر غیر معین ہے۔ اس لیے ہم پھر لا کی قیمت کو ۲ سے کسی قدر مختلف لیتے ہیں یعنی

$$۱ - ۲ = ۱$$

رکھتے ہیں جہاں م ←۔ جبکہ لا ← ۲ ہے یعنی جوں جوں لا عدد ۲ کے قریب آتا ہے اسی قدر م صفر کے قریب پہنچتا ہے۔ پس

$$\frac{\overline{۱-۱۱} - \overline{۱۱-۱۱}}{\overline{۱۱-۱۱}} = \frac{\overline{۱-۱۱} - \overline{۱۱-۱۱}}{\overline{۱۱-۱۱}} = ۱$$

اب چونکہ م کبھی بالکل صفر کے مساوی نہیں ہوتا اس لیے بائیں طرف

کے جملہ کو اوپر اور نیچے  $\overline{۱-۱۱} + \overline{۱۱-۱۱}$  سے ضرب دیتے ہیں تاکہ مقادیر م شمار کنندہ میں سے نکل جائیں۔

$$\frac{\overline{۱-۱۱} - \overline{۱۱-۱۱}}{\overline{۱۱-۱۱}} = \frac{\overline{۱-۱۱} - \overline{۱۱-۱۱}}{\overline{۱۱-۱۱}} = ۱$$

$$\frac{۱}{\overline{۱-۱۱} + \overline{۱۱-۱۱}} = \frac{۱}{۲}$$

اب ظاہر ہے کہ م جس قدر چھوٹا ہوتا جائیگا اسی قدر جملہ

کی قیمت  $\frac{۱}{۲}$  کے قریب آئیگی۔ پس جس قدر م چھوٹا

ہونا جائیگا اسی قدر ماکہ قیمت  $\frac{2}{3} \times \frac{1}{4}$  یعنی  $\frac{1}{6}$  کے قریب آتی جائیگی۔  
اس لیے مطلوبہ انتہا  $\frac{1}{6}$  ہے یعنی

$$\frac{1}{6} = \frac{3 - \sqrt{1 - 12} - \sqrt{12 - 1}}{12 - 4}$$

مسئلہ ۱۔ اگر  $\frac{1}{4} = \frac{1}{6}$  اور  $\frac{1}{6} = \infty$  تو  $\frac{1}{4} = \infty$

یعنی الفاظ میں ہم اس کو یوں بیان کر سکتے ہیں کہ اگر لاکہ ہم کافی چھوٹی قیمت لیں تو ماکہ جس قدر چاہیں بڑا بنا سکتے ہیں۔

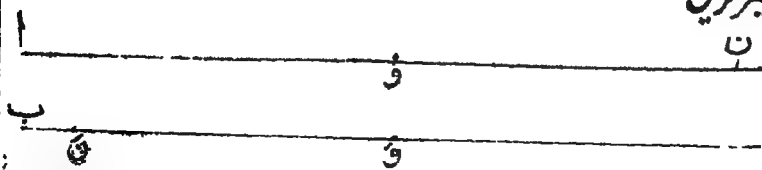
فرض کرو کہ گ کوئی بڑا عدد مثلاً (۱۰۰۰۰۰۰۰) ہے اور ہم چاہتے ہیں کہ ماکہ اس عدد سے بھی بڑا ہو جائے۔ چونکہ لاکہ انتہا صفر ہے اس لیے ہم لاکہ جتنا چاہیں چھوٹا بنا سکتے ہیں۔ مثلاً ہم لاکہ (۱۰۰۰۰۰۰۰) سے چھوٹا لیتے ہیں تب ماکہ دیے ہوئے عدد گ سے بڑا ہو جائیگا۔

مسئلہ ۲۔ اگر  $\frac{1}{4} = \frac{1}{6}$  اور  $\frac{1}{6} = \infty$  تو  $\frac{1}{4} = \infty$  یعنی

اگر لاکہ قیمت کو ہم کافی بڑا لیں تو ماکہ قیمت کو جس قدر چاہیں کم کر سکتے ہیں۔  
مثلاً اگر ہم ماکہ قیمت (۱۰۰۰۰۰۰۰) سے چھوٹی کرنی چاہیں تو لاکہ (۱۰۰۰۰۰۰۰) سے بڑا لینا کافی ہوگا۔

مسئلہ ۳۔ اگر  $\frac{1}{4} = \frac{1}{6}$  اور  $\frac{1}{6} = \infty$  تو  $\frac{1}{4} = \infty$ ؛

یعنی اگر ہم لاکہ ماکہ قیمتوں کو بالترتیب دو خطوط مستقیم ۱ اور ۲ پر تعبیر کریں



اور دونوں خطوں پر مبداء و (۰ = ۰) اور و (۰ = ۰) ہوں تو خط ۱ پر

مبدأ و سے سیدھی طرف بہت دور فاصلہ پر ایک نقطہ ن کے جواب میں خط ب پر  
مبدأ و سے بائیں طرف بہت دور فاصلہ پر ایک نقطہ ن ملے گا۔  
ان مسائل کی مدد سے ہم تفاعل کی انتہا دریافت کر سکتے ہیں جبکہ  
لا  $\leftarrow + \infty$  یا لا  $\leftarrow - \infty$  ہو۔

مثال ۱۔ نہا  $\frac{1}{\infty \leftarrow}$  لا  $\frac{1}{\infty \leftarrow}$

رکھو ما  $= \frac{1}{\infty \leftarrow}$  پس  $\frac{1}{\infty \leftarrow} = \frac{1}{\infty \leftarrow} = \frac{1}{\infty \leftarrow}$  لا  $\frac{1}{\infty \leftarrow}$  ما  $\frac{1}{\infty \leftarrow}$   
نیز ہم کو مسئلہ ۲ سے معلوم ہے کہ اگر لا  $\leftarrow \infty$  تو ما  $\leftarrow 0$ ۔

پس نہا  $\frac{1}{\infty \leftarrow} = \frac{1}{\infty \leftarrow} = \frac{1}{\infty \leftarrow}$  لا  $\frac{1}{\infty \leftarrow}$  ما  $\frac{1}{\infty \leftarrow}$  (کیونکہ ما  $\leftarrow 0$  جبکہ ما  $\leftarrow 0$ )

مثال ۲۔ نہا  $\frac{1}{\infty \leftarrow}$  لا  $\frac{1}{\infty \leftarrow}$  (ما  $\frac{1}{\infty \leftarrow}$ )

رکھو ما  $= -$  لا اور ما  $\leftarrow + \infty$  جبکہ لا  $\leftarrow - \infty$

پس نہا  $\frac{1}{\infty \leftarrow} = \frac{1}{\infty \leftarrow} = \frac{1}{\infty \leftarrow}$  لا  $\frac{1}{\infty \leftarrow}$  (ما  $\frac{1}{\infty \leftarrow}$ )

$\left( \frac{1}{\infty \leftarrow} + \frac{1}{\infty \leftarrow} \right) =$

$\left( \frac{1}{\infty \leftarrow} - \frac{1}{\infty \leftarrow} \right) =$

$\frac{1}{\infty \leftarrow} =$

۵۴ و ۱۔ مسئلہ۔ اگر ف (لا) اور ف (لا) کوئی دو تفاعل

ہوں اور اگر نہا  $\frac{1}{\infty \leftarrow}$  ف (لا) = ل' نہا  $\frac{1}{\infty \leftarrow}$  ف (لا) = م تو

$$(۱) \quad \text{نہا} \leftarrow \text{ج} \{ \text{ف (لا)} + \text{فہ (لا)} \} = \text{ل} + \text{م}$$

$$(۲) \quad \text{نہا} \leftarrow \text{ج} \{ \text{ف (لا)} - \text{فہ (لا)} \} = \text{ل} - \text{م}$$

$$(۳) \quad \text{نہا} \leftarrow \text{ج} \text{ف (لا)} \times \text{فہ (لا)} = \text{ل} \times \text{م}$$

$$(۴) \quad \text{نہا} \leftarrow \text{ج} \frac{\text{ف (لا)}}{\text{فہ (لا)}} = \frac{\text{ل}}{\text{م}} \text{ (بشرطیکہ م } \neq ۰)$$

ان مسائل کا ثبوت اسی طریقہ پر دیا جاسکتا ہے جیسا کہ ہم نے دفعہ ۴۰ میں دو تواتروں کے لیے دیا ہے۔ ہم یہاں صرف مسئلہ (۱) یعنی حاصل جمع کے لیے یہ ثبوت دینگے۔ باقی تین مسئلوں کے لیے طالب علم کو یہ ثبوت بطور مشق خود فراہم کرنا چاہیے۔

چونکہ ف (لا) کی انتہا جبکہ لا  $\leftarrow$  ج ہول ہے اس لیے اگر ہم لا کو ج کے کافی قریب لیں تو ف (لا) اور ل کا فرق جتنا چاہیں چھوٹا کر سکتے ہیں، مثلاً فرض کرو کہ اگر لا کو ج کے قریب بقدر حد سے کم کے لایا جائے تو ف (لا) اور ل کا فرق  $\frac{۱}{۳}$  سے چھوٹا ہو جاتا ہے یعنی

|ف (لا) - ل| >  $\frac{۱}{۳}$  جہاں صہ ایک اختیاری چھوٹا عدد ہے۔  
اس طرح فرض کرو کہ اگر لا کو ج کے قریب بقدر کم سے کم کے لایا جائے تو فہ (لا) اور م کا فرق بھی  $\frac{۱}{۳}$  سے چھوٹا ہو جاتا ہے یعنی

$$|فہ (لا) - م| > \frac{۱}{۳}$$

ان میں صہ اور ک دو چھوٹے مثبت عدد ہو گئے۔ ان دونوں میں سے جو کوئی بھی چھوٹا ہو اس کو ضہ سے تعبیر کرو۔ تو اگر اب لا کو ج کے قریب بقدر ضہ سے کم کے لایا جائے تو اس نقطہ کے لیے اوپر کی نامساوی

بیک وقت پوری ہونگی اور اس لیے

$$| \text{ا} \text{ف} (\text{لا}) - \text{ل} | + | \text{ا} \text{ذ} (\text{لا}) - \text{م} | > \text{ص}$$

بشرطیکہ لا اور ج کا فرق صہ سے کم ہو۔ پس چونکہ

$$| \{ \text{ا} \text{ف} (\text{لا}) + \text{ف} (\text{لا}) \} - (\text{ل} + \text{م}) | \geq | \text{ا} \text{ف} (\text{لا}) - \text{ل} | + | \text{ا} \text{ذ} (\text{لا}) - \text{م} |$$

$$> \text{ص}$$

اس لیے

$$\text{لا} \leftarrow \text{ج} \quad \{ \text{ا} \text{ف} (\text{لا}) + \text{ف} (\text{لا}) \} = \text{ل} + \text{م}$$

اس مسئلہ کا حسب ذیل دوسرا ثبوت بھی دیا جاسکتا ہے جو اگرچہ اس قدر مکمل نہیں ہے لیکن زیادہ عام فہم ہے۔  
چونکہ ف (لا) کی انتہا ل ہے جبکہ لا ← ج ہو اس لیے لا کو ج کے کافی قریب لانے پر ہم لکھ سکتے ہیں

ف (لا) = ل + صہ  
جہاں صہ کی قیمت لا پر منحصر ہوگی اور صہ ←۔ جبکہ لا ← ج لینے لا کو ج کے کافی قریب لانے پر صہ کو کافی چھوٹا کیا جاسکتا ہے۔ اس طرح

$$\text{ف} (\text{لا}) = \text{م} + \text{صہ}$$

جہاں صہ ←۔ جبکہ لا ← ج؛ پس

$$\text{ف} (\text{لا}) + \text{ف} (\text{لا}) = (\text{ل} + \text{صہ}) + (\text{م} + \text{صہ}) = (\text{ل} + \text{م}) + (\text{صہ} + \text{صہ})$$

یعنی  $| \{ \text{ا} \text{ف} (\text{لا}) + \text{ف} (\text{لا}) \} - (\text{ل} + \text{م}) | = | \text{ا} \text{ف} (\text{لا}) - \text{ل} | + | \text{ا} \text{ف} (\text{لا}) - \text{م} |$   
اب ظاہر ہے کہ ہم لا کو ج کے اس قدر قریب لے سکتے ہیں کہ صہ + صہ کی مطلق قیمت جس قدر چاہیں چھوٹی ہو جائے یعنی صہ سے بھی چھوٹی ہو جائے پس

$$\text{نہا} = \{ \text{ف (لا)} + \text{ذ (لا)} \} = \text{ل} + \text{م}$$

۱۵۵- مثالیں -

مثال ۱- اگر  $\text{ف (لا)} = \frac{2 - \sqrt{1} + \text{لا}}{1 - \text{لا}}$  تو نہا  $\text{ف (لا)}$  معلوم کرو۔

ظاہر ہے کہ نقطہ لا = ۱ پر تفاعل ف (لا) غیر معین ہے۔  
لیکن چند خاص نقطوں پر تفاعل کی قیمت کو ہم جدول کی شکل میں اس طرح ظاہر کر سکتے ہیں:-

|          |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|----------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| لا =     | ۱    | ۱/۲  | ۱/۳  | ۱/۴  | ۱/۵  | ۱/۶  | ۱/۷  | ۱/۸  | ۱/۹  | ۱/۱۰ |
| ف (لا) = | ۱/۳۸ | ۱/۳۹ | ۱/۴۰ | ۱/۴۱ | ۱/۴۲ | ۱/۴۳ | ۱/۴۴ | ۱/۴۵ | ۱/۴۶ | ۱/۴۷ |

اگر لاکو بائیں طرف سے بتدریج ا کے قریب لایا جائے تو حسب ذیل جدول حاصل ہوتی ہے:-

|          |      |        |         |          |           |            |             |
|----------|------|--------|---------|----------|-----------|------------|-------------|
| لا =     | ۰.۹  | ۰.۹۹   | ۰.۹۹۹   | ۰.۹۹۹۹   | ۰.۹۹۹۹۹   | ۰.۹۹۹۹۹۹   | ۰.۹۹۹۹۹۹۹   |
| ف (لا) = | ۱/۵۱ | ۱/۵۰.۱ | ۱/۵۰.۰۱ | ۱/۵۰.۰۰۱ | ۱/۵۰.۰۰۰۱ | ۱/۵۰.۰۰۰۰۱ | ۱/۵۰.۰۰۰۰۰۱ |

اس سے ہم دیکھتے ہیں کہ جب لا مائل بہا ہو تو ف (لا) مائل بہ دہا ہوتا ہے یعنی:

$$\text{نہا} = \frac{2 - \sqrt{1} + \text{لا}}{1 - \text{لا}} = ۱۵$$

اسی انتہا کو ہم دوسری طرح سے چال کر سکتے ہیں۔ اگر لاک کی قیمت سوائے ا کے کچھ ہی ہو تو ہم ف (لا) کو مختصر کر کے لکھتے ہیں:

$$\frac{2+\overline{لا}}{1+\overline{لا}} = \frac{(2+\overline{لا})(1-\overline{لا})}{(1+\overline{لا})(1-\overline{لا})} = \frac{2-\overline{لا}+لا}{1-\overline{لا}} = \text{ف (لا)}$$

اب اگر ہم لا کو مائل بہ اکریں تو آسانی سے ملتا ہے کہ  $\frac{2+\overline{لا}}{1+\overline{لا}}$  کی انتہا ۵۱ ہے۔

مثال ۲۔ اگر ف (لا) = جب لا تو سیاف (لا) معلوم کرو۔

$$\text{چونکہ جب (- لا) = - جب لا = جب لا یعنی چونکہ ف (- لا) = ف (لا)}$$

اس لیے کسی ایک طرف سیافیتوں سے لا کو صفر کی طرف مائل کرنا کافی ہے۔  
مشقی نسبتوں کی جدول سے ہم کو حسب ذیل قیمتیں حاصل ہوتی ہیں :-

| لا = ۱ | ۵۸    | ۶۶    | ۷۴    | ۸۲    | ۹۱    |
|--------|-------|-------|-------|-------|-------|
| ۵۰۱۷۵  | ۵۰۱۴۰ | ۵۰۱۰۵ | ۵۰۰۷۰ | ۵۰۰۳۵ | ۵۰۰۱۷ |

اس جدول سے ہم دیکھتے ہیں کہ جب لا کی نسبت بتدیج ۰.۱ کی طرف مائل ہو رہی ہے جبکہ لا چھوٹا ہوتا جا رہا ہے۔ اس لیے

$$\text{نہا جب لا} = ۰.۱۷$$

نوٹ - یہ یاد رکھنا چاہیے کہ یہاں زاویہ لا کو ہم نے درجوں میں ناپا ہے۔ آگے باب دوم میں ہم ثابت کریں گے کہ اگر زاویہ ط کو نیم قطروں میں ناپا جائے تو

$$\text{نہا جب ط} = ۱$$

اس سے ظاہر ہے کہ جس وقت لا کو درجوں میں ناپا جائے تو

$$\text{نہا جب لا} = \frac{\pi}{180} = ۰.۰۱۷$$

ہونا چاہیے۔

مثال ۳۔ اگر ف (لا) =  $\frac{2+\overline{لا}+لا}{1+\overline{لا}}$  ہو تو

نہیاف (لا) معلوم کرو۔ تفاعل ف (لا) کی قیمت نقطہ لا = پر غیر معین ہے۔ لیکن اگر سوالے صفر کے لا کی قیمت کچھ ہی ہو تو

$$\frac{\{ \sqrt{لا + لا + ۱} - \sqrt{لا - لا + ۱} \}}{لا} = \text{ف (لا)}$$

$$\frac{\{ \sqrt{لا + لا + ۱} + \sqrt{لا - لا + ۱} \} \{ \sqrt{لا - لا + ۱} - \sqrt{لا + لا + ۱} \}}{\{ \sqrt{لا - لا + ۱} + \sqrt{لا + لا + ۱} \} لا} =$$

$$\frac{(لا - لا + ۱) - (لا + لا + ۱)}{\{ \sqrt{لا - لا + ۱} + \sqrt{لا + لا + ۱} \} لا} =$$

$$\frac{\{ \sqrt{لا - لا + ۱} + \sqrt{لا + لا + ۱} \} لا}{لا^۲} =$$

$$\frac{۲}{\{ \sqrt{لا - لا + ۱} + \sqrt{لا + لا + ۱} \} لا} =$$

اس میں نسب نما ← ۲ جبکہ لا ← اس لیے تفاعل کی انتہا  $\frac{۲}{۱} = ۲$  ہے

پس لا نہیاف ←  $۱ = \frac{\sqrt{لا - لا + ۱} - \sqrt{لا + لا + ۱}}{لا}$

## مشقی سوالات ۴

ذیل کی انتہائیں معلوم کرو:-

(۱) نہیاف  $\frac{لا^۳ + ۱}{لا^۳ - ۲}$  ← لا



|  |     |      |
|--|-----|------|
| $\frac{u^3 + 1}{u^3 - 2}$                | نہا | (۲)  |
| $\frac{1 + u^2}{4 + u^3}$                | نہا | (۳)  |
| $\frac{1 + u^2}{2 + u^3}$                | نہا | (۴)  |
| $\frac{1 - u}{1 + u}$                    | نہا | (۵)  |
| $\frac{1 - u}{1 + u}$                    | نہا | (۶)  |
| $\frac{1 - u - u^2 + u^3}{2 + u^3 - 2u}$ | نہا | (۷)  |
| $\frac{5 + u^2}{5 + u}$                  | نہا | (۸)  |
| $\frac{1 - u^2}{1 - u}$                  | نہا | (۹)  |
| $\frac{(1 + u)u}{(3 + u)(2 + u)}$        | نہا | (۱۰) |
| $\frac{u + 1 - u^2 + 1}{u}$              | نہا | (۱۱) |
| $\frac{u^2 u^2 + 1 - u^2 u^2 + 1}{u^2}$  | نہا | (۱۲) |
| $\frac{u - 1 - u^3 - u + 1 - u^3}{u}$    | نہا | (۱۳) |
| $\frac{1 + u - 2 - 2 + u}{u^2}$          | نہا | (۱۴) |
| $\frac{u^2 - u^2(u + u)}{u}$             | نہا | (۱۵) |
| $\frac{3 + u^2 + u}{8 - u^2 - u^2}$      | نہا | (۱۶) |
| $\frac{u - u^2}{2 - u^3 - 2 + u}$        | نہا | (۱۷) |

|  |          |
|--|----------|
| $\frac{u^2 - v^2}{u - v}$  | نہی (۱۸) |
| $\frac{1 - u^3 + v^3}{1 + u^2 - v^2}$  | نہی (۱۹) |
| $\frac{1 - u^3 + v^3}{1 + u^2 - v^2}$  | نہی (۲۰) |
| $\frac{2 + u^3 + v^3}{3 + u^2 - v^2}$  | نہی (۲۱) |
| $\frac{2 + u^3 + v^3}{3 + u^2 - v^2}$  | نہی (۲۲) |
| $\frac{1 + u^2}{1 + v^2}$  | نہی (۲۳) |
| $\frac{1 + u^2}{1 + v^2}$  | نہی (۲۴) |
| $\frac{2 + u^3}{3 + u^2 - v^2}$  | نہی (۲۵) |
| $\frac{2 + u^3}{3 + u^2 - v^2}$  | نہی (۲۶) |
| <p>(۲۷) اگر <math>(u) = \frac{u^2 + v^2 + u^2 + v^2 + \dots + u^2 + v^2}{u^2 + v^2 + u^2 + v^2 + \dots + u^2 + v^2}</math></p> <p>تو ثابت کرو کہ (۱) نہی (۲) نہی (۳) نہی (۴) نہی (۵) نہی (۶) نہی (۷) نہی (۸) نہی (۹) نہی (۱۰) نہی (۱۱) نہی (۱۲) نہی (۱۳) نہی (۱۴) نہی (۱۵) نہی (۱۶) نہی (۱۷) نہی (۱۸) نہی (۱۹) نہی (۲۰) نہی (۲۱) نہی (۲۲) نہی (۲۳) نہی (۲۴) نہی (۲۵) نہی (۲۶) نہی (۲۷) نہی (۲۸) نہی (۲۹) نہی (۳۰) نہی (۳۱) نہی (۳۲) نہی (۳۳) نہی (۳۴) نہی (۳۵) نہی (۳۶) نہی (۳۷) نہی (۳۸) نہی (۳۹) نہی (۴۰) نہی (۴۱) نہی (۴۲) نہی (۴۳) نہی (۴۴) نہی (۴۵) نہی (۴۶) نہی (۴۷) نہی (۴۸) نہی (۴۹) نہی (۵۰) نہی (۵۱) نہی (۵۲) نہی (۵۳) نہی (۵۴) نہی (۵۵) نہی (۵۶) نہی (۵۷) نہی (۵۸) نہی (۵۹) نہی (۶۰) نہی (۶۱) نہی (۶۲) نہی (۶۳) نہی (۶۴) نہی (۶۵) نہی (۶۶) نہی (۶۷) نہی (۶۸) نہی (۶۹) نہی (۷۰) نہی (۷۱) نہی (۷۲) نہی (۷۳) نہی (۷۴) نہی (۷۵) نہی (۷۶) نہی (۷۷) نہی (۷۸) نہی (۷۹) نہی (۸۰) نہی (۸۱) نہی (۸۲) نہی (۸۳) نہی (۸۴) نہی (۸۵) نہی (۸۶) نہی (۸۷) نہی (۸۸) نہی (۸۹) نہی (۹۰) نہی (۹۱) نہی (۹۲) نہی (۹۳) نہی (۹۴) نہی (۹۵) نہی (۹۶) نہی (۹۷) نہی (۹۸) نہی (۹۹) نہی (۱۰۰)</p> |          |
| $\frac{1 + u^2}{1 + v^2}$  | نہی (۲۸) |
| $\frac{1 - u^2}{1 + v^2}$  | نہی (۲۹) |
| $\frac{1}{2}$  | نہی (۳۰) |
| $\frac{1}{2}$  | نہی (۳۱) |
| $\frac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2}$  | نہی (۳۲) |

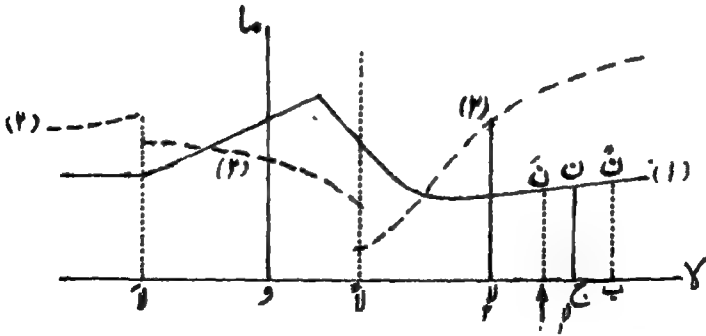
|   |     |      |
|---|-----|------|
| $\frac{۲۷ - ۳۷}{۷ - ۲۷}$                | نہا | (۳۳) |
| $\frac{۷ - ۲۷}{۲۷ - ۳۷}$                | نہا | (۳۴) |
| $\frac{۲+۷۳ - ۲۷}{۳+۷۴ - ۲۷}$           | نہا | (۳۵) |
| $\frac{۶+۷۷+۲۷۶ - ۲۷}{۸ - ۲۷}$          | نہا | (۳۶) |
| $\frac{۸ + ۲۷}{۲+۷۳+ ۲۷}$               | نہا | (۳۷) |
| $\frac{۱ - ۷۷}{۱ - ۷۷۳}$                | نہا | (۳۸) |
| $\frac{۲-۷۸+۲۷۵ - ۲۷}{۴+ ۲۷۳ - ۲۷}$     | نہا | (۳۹) |
| $\frac{۱+ ۷ - ۲۷ - ۲۷}{۲+ ۷۳ - ۲۷}$     | نہا | (۴۰) |
| $\frac{۱+ ۷۳+ ۲۷۳+ ۲۷}{۳۷۳-۲۷۵- ۷ - ۱}$ | نہا | (۴۱) |

# باب دوم

## مسلل تفاعل

۱ و ۲۔ مسلسل تفاعل کی تعریف۔

۱ و ۳۔ طالب علم کو یقیناً اس کا کسی قدر تصور ہو گا کہ ایک مسلسل معنی سے کیا مراد ہے۔ مثلاً ذیل کی شکل میں طالب علم یہ کہیگا کہ معنی (۱) مسلسل اور معنی (۲) غیر مسلسل ہے۔



اسی طرح دفعہ ۲۳ و ۱ میں ہم نے جن سادہ تفاعلوں  
 $ما = م لا، ما = لا، ما = لا، ما = لا، ما = لا، ما = لا، ما = لا$  کے معنی

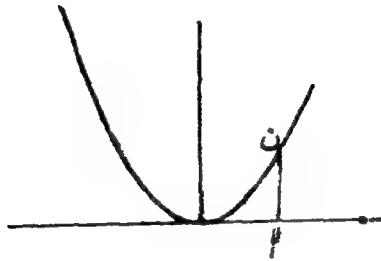
کھینچے ہیں یہ مسلل ہیں لیکن  $\text{م} = \text{مس}$  لا اور  $\text{م} = \text{ملا}$  کے منحنی غیر مسلل ہیں۔  
 منحنی (۱) یا منحنی (۲) کسی کو ہم تفاعل  $\text{م} = \text{ف}$  (لا) کی ترسیم تصور کر سکتے ہیں اور قدرتی طور پر یہاں یہ خیال ہوتا ہے کہ ہم تفاعل  $\text{ف}$  (لا) کو مسلل کہیں اگر اس کا ترسیمی منحنی مسلل ہو اور تفاعل  $\text{ف}$  (لا) کو غیر مسلل کہیں اگر اس کا ترسیمی منحنی غیر مسلل ہو۔ یہ اگرچہ کوئی مضابطہ تعریف نہیں ہے لیکن سہرست ہم اسی تعریف کو اختیار کر رہے ہیں اور یہاں کہہ رہے ہیں: مضابطہ تعریف اخذ کرنے کی کوشش کریں گے۔  
 لا کی تمام قیمتوں کے لیے تسلسل کی تعریف کرنے سے پیشتر ضروری ہے کہ لا کی صرف ایک معین قیمت پر تسلسل کی تعریف کی جائے۔ اس لیے ہم لا کی ایک خاص قیمت لا لیتے ہیں جس کے جراب میں منحنی (۱) یا نقطہ  $\text{ن}$  شامل ہوتا ہے۔ اب ہم دریافت کریں گے کہ تفاعل  $\text{ف}$  (لا) کی وہ کونسی امتیازی خاصیتیں ہیں جو لا کی اس معین قیمت لا کے ساتھ منسوب ہیں۔

پہلے تو ہم دیکھتے ہیں کہ تفاعل  $\text{ف}$  (لا) کی تعریف نقطہ  $\text{لا} = \text{لا}$  پر کی گئی ہے یعنی نقطہ لا پر تفاعل کی قیمت  $\text{ف}$  (لا) معین اور معلوم ہے۔ ظاہر ہے کہ یہ خاصیت بہت ضروری ہے کیونکہ اگر تفاعل کی قیمت نقطہ لا پر معلوم نہ ہو تو منحنی میں سے ایک نقطہ غائب ہوگا۔

دوسری اہم خاصیت جو ہمیں نظر آتی ہے وہ یہ ہے کہ نقطہ  $\text{لا} = \text{لا}$  کے قریب تمام نقطوں کے لیے تفاعل  $\text{ف}$  (لا) کی قیمت معلوم ہو یعنی ہم ایک چھوٹا وقفہ ایسا معلوم کر سکتے ہیں کہ جس میں لا شامل ہو اور جس پر اس کے تمام نقطوں کے لیے تفاعل  $\text{ف}$  (لا) کی قیمت معلوم اور معین ہو۔ فکتل میں ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ہم نقطہ  $\text{لا} = \text{لا}$  (ج) کے دونوں طرف نقاط ۱ اور ۲ ہیں تو خط کے حصہ اب پر کے تمام نقطوں پر تفاعل کی قیمت معلوم ہے۔

تیسری یہ کہ اگر ہم نقطہ ۱ کو نقطہ ج کے قریب لائیں تو معین ۱ ن معین ج ن کے قریب آتا جائیگا یعنی تفاعل  $\text{ف}$  (لا) قیمت  $\text{ف}$  (لا) کے قریب آتا جائیگا۔ اسی طرح اگر سیدی طرف سے ہم نقطہ ب کو نقطہ ج کے قریب لائیں تو معین ب ن معین ج ن کے قریب آتا جائیگا یعنی اب بھی تفاعل

ف (لا) قیمت ف (لا) کے قریب آئیگا۔ یعنی اگر لا بائیں یا سیدھی کسی طرف سے مائل ہو تو تفاعل ف (لا) مائل بہ ث (لا) ہو۔  
مثلاً ایک خاص مثال کے طور پر ہم تفاعل  $۲ = ف (لا) = لا$  پر غور کرتے ہیں جس کا معنی ہندسہ تحلیل کی رو سے ایک مکانی ملتا ہے۔



اس تفاعل لا کے تسلسل کی خاصیت معلوم کرنے کے لیے ہم نقطہ  $لا = ۱$  پر غور کرتے ہیں یعنی لا کی قیمت ایسے ہیں ہم دیکھتے ہیں کہ اس میں اوپر کی تینوں خاصیتیں پائی جاتی ہیں۔  
(۱) ظاہر ہے کہ نقطہ اوپر تفاعل کی قیمت معین اور معلوم ہے  
یعنی  $لا = ۱$

(۲) نقطہ  $لا = ۱$  اور  $لا = ۱$  کے درمیان تمام نقطوں پر تفاعل کی قیمت معلوم ہے جس کو ہم حساب لگا کر معلوم کر سکتے ہیں۔ مثلاً  $لا = ۱$  پر قیمت  $۱$  اور  $لا = ۱$  پر قیمت  $۲$  ہے۔ اس خاص تفاعل کے لیے نہ صرف وقفہ  $۱$  سے لے کر  $۱$  تک بلکہ  $۱$  سے لے کر  $۱$  تک تمام نقطوں پر تفاعل کی قیمت معلوم ہو سکتی ہے۔

(۳) آسانی سے معلوم ہو سکتا ہے کہ چاہے لا  $۱$  سے بڑھاتے ہوئے بتدریج  $۱$  کی طرف مائل کیا جائے یا  $۱$  ات گھٹاتے ہوئے بتدریج  $۱$  کی طرف مائل کیا جائے دونوں صورتوں میں لا  $۱$  انتہا  $۱$  ہے۔

یعنی نہی لا = ا اس تشریح کے بعد ظاہر ہے کہ ہم تسلسل کی حسب ذیل تعریف کر سکتے ہیں :-

## ۲۱۲: مسلسل تفاعل کی تعریف :- تفاعل

ف (لا) کو نقطہ لا پر مسلسل کہا جاتا ہے بشرطیکہ ف (لا) قیمت ف (لا) کی طرف مائل ہو جبکہ لاسیدھی یا بائیں طرف سے مائل بہ لا ہو۔ یعنی بشرطیکہ

$$\text{نہی لا} = \text{ف (لا)}$$

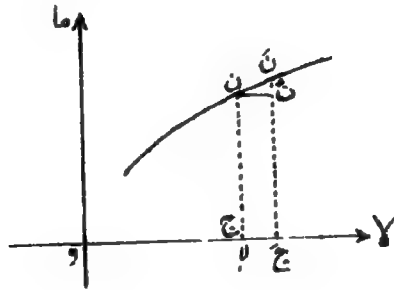
فی ٹ :- انتہا کے بیان میں ہم نے طاب علم کی توجہ اس طرف مبذول کرائی تھی کہ عام صورت میں کسی نقطہ پر ایک تفاعل کی انتہا اور اس کی قیمت میں کوئی تعلق نہیں ہوتا۔ لیکن ہم نے وہاں دیکھا تھا کہ اتفاقی طور پر بعض تفاعلات کی قیمت اور انتہا مساوی ہوتے ہیں۔ یہی خاص تفاعل ہیں جن کو ہم یہاں مسلسل کہتے ہیں۔ تو گویا مسلسل تفاعل کی تعریف یوں کی جا رہی ہے کہ یہ وہ تفاعل ہے جس کی انتہا اور قیمت ایک ہی ہے۔

اس سے ہم دیکھتے ہیں کہ مسلسل تفاعل کا مفہوم انتہا کے مفہوم پر مبنی ہے۔ ایک عام تفاعل اور مسلسل تفاعل میں فرق صرف اس قدر ہے کہ عام تفاعل کے لیے نہی لا = ف (لا) کوئی مدد مل سکتا ہے لیکن ایک مسلسل تفاعل کے لیے خاص طور پر ل کو ف (لا) کے مساوی ہونا چاہیے۔ اگر ہم انتہا کی تعریف جو دفعہ ۱۵۲ میں کی گئی ہے اس کو زیر نظر رکھیں اور اس تعریف میں ل کی بجائے ف (لا) درج کریں تو ایک تسلسل تفاعل کی تعریف اس طرح بھی کی جاسکتی ہے :-

## مسلل تفاعل کی دوسری تعریف :- تفاعل ف (لا)

نقطہ لا پر مسلسل اس وقت ہوگا جبکہ اگر صہ کوئی دیا ہوا چھوٹا عدد ہو تو نقطہ لا کے کافی قریب (یعنی ایک فاصلہ صہ پر) کے کسی نقطہ لا پر تفاعل کی قیمت ف (لا) اور ف (لا) کا فرق صہ سے چھوٹا ہو یعنی مختصر الفاظ میں ف (لا) نقطہ لا پر اس وقت مسلسل ہوگا جبکہ جوں جوں نقطہ لا نقطہ لا کے قریب آتا جائے اسی قدر قیمت ف (لا) قیمت ف (لا) کے قریب ہوتی جائے۔ یعنی اگر لا میں توڑا فرق پیدا کیا جائے تو ف (لا) میں بھی بہت تھوڑا فرق پیدا ہو جائے۔ مسلسل تفاعل کی اس خاصیت کو ہم دوسرے الفاظ میں حسب ذیل طریقہ پر ادا کر سکتے ہیں۔

فرض کر دو کہ ما = ف (لا) ایک تفاعل ہے لا کا جس کی قیمت نقطہ لا اور اس کے قریب کے نقطوں پر معلوم اور معین ہے۔



شکل میں نقطہ ج محور لا پر عدد لا کو تعبیر کرتا ہے یعنی ج = لا اور اس لیے ج ن تفاعل کی قیمت کو یعنی ما = ف (لا) کو تعبیر کرتا ہے۔  
لا کی قیمت میں ہم ایک خفیف اضافہ کرتے ہیں یعنی لا کی قیمت کو لا سے بدل کر (لا + ہ) کر دیتے ہیں جہاں ہ ایک چھوٹا عدد ہے جس کو ہم مثبت یا منفی جس علامت کے ساتھ چاہیں لے سکتے ہیں (شکل میں ہم نے ہ کو مثبت علامت کے ساتھ لیا ہے)۔

پس وج = لا + ہ

اس لیے ج ن = ف (لا + ہ) = ا + ک فرض کر دو کیونکہ یہ



قیمت اسے کچھ مختلف ہوگی۔ ن ن محور لا کے متوازی کیمنچو جو ج ن کو نقطہ ن پر ملے تو ن ن = ک  
ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ہم لا میں چھوٹی تبدیلی مہ کر دیں تو تفاعل کی قیمت لا میں اسی کے جواب میں ایک چھوٹی تبدیلی ک = ف (لا + م)۔ ف (لا) پیدا ہو جاتی ہے۔ اگر ہم تفاعل کی قیمت ج ن میں اس سے بھی کم تبدیلی کرنا چاہیں تو نقطہ ج ک کو ج کے اور زیادہ قریب لے سکتے ہیں۔ غرض کہ جول جول نقطہ ج ک نقطہ ج کے قریب آتا ہے اسی قدر قیمت ج ک قیمت ج ن کے قریب آتی ہے  
اسی بنا پر ہم کہتے ہیں کہ تفاعل ف (لا) نقطہ لا پر مسلسل ہے۔

۱۳۔ ایک وقفہ میں مسلسل تفاعل :-

متغیر لا کا وقفہ۔ تعریف :- فرض کرو کہ لا اور ب

دو حقیقی عدد ہیں اور ب < لا اگر ایک مسلسل متغیر لا عددوں لا اور ب کی درمیانی ہر حقیقی قیمت کو بشمول لا اور ب اختیار کر سکے تو ہم کہتے ہیں کہ لا بند وقفہ (لا ب) میں معلوم ہے یا بالفاظ دیگر لا کا بند وقفہ (لا ب) ہے۔ اگر اس وقفہ میں سے خود اعداد لا اور ب خارج ہوں تو اس وقفہ کو لا کا کھلا وقفہ کہتے ہیں۔

اس کتاب میں جب تک کہ صریحاً بیان نہ کیا جائے محض وقفہ سے

ہماری مراد ہمیشہ بند وقفہ ہوگی۔

ایک وقفہ میں مسلسل تفاعل۔ تعریف :- اگر تفاعل ف (لا)

وقفہ (لا ب) میں کے ہر نقطہ پر مسلسل ہو تو ہم کہتے ہیں کہ تفاعل ف (لا) پورے وقفہ (لا ب) میں مسلسل ہے۔

۲۔ ۲ : مسلسل تفاعل کی مثالیں :-

۲۱ کو ۲ - مثال ۱ —  $\text{لا} = \text{ا}$  :  
 اگر لا کو بدل کر لا + ہ کر دیا جائے تو لا بدل کر ( لا + ہ )  
 یعنی لا + ۲ ہ لا + ہ ہو جائے اور اس لیے ا میں تبدیلی ۲ ہ لا + ہ  
 ہوتی ہے۔  
 تفاعل لا کو مسلل ثابت کرنے کے لیے ضروری ہے کہ تبدیلی  
 ۲ ہ لا + ہ کو چھوٹا ثابت کیا جائے۔ اب اگر صہ کوئی دیا ہوا چھوٹا مثبت  
 عدد ہو

$$۲ ہ لا + ہ > صہ$$

بشرطیکہ

$$\text{لا} + ۲ ہ لا + ہ > \text{لا} + صہ$$

یعنی اگر

$$\text{لا} + صہ > ( لا + ہ )$$

یعنی اگر

$$\text{لا} + صہ > \text{لا} + ہ$$

یعنی اگر

$$\text{لا} + صہ > \text{لا} + ہ$$

پس معلوم ہوا کہ اگر لا میں تبدیلی ہ کو  $\text{لا} + صہ - لا$  سے چھوٹا  
 لیا جائے تو ا میں تبدیلی صہ سے چھوٹی ہوتی ہے چاہے لا کی کچھ ہی قیمت  
 ہو۔ جس سے ظاہر ہے کہ  $\infty$  سے لے کر  $\infty$  تک لا کی تمام قیمتوں  
 کے لیے تفاعل لا مسلل ہے۔

اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ  $\text{لا} = \text{ا}$  جہاں ن کوئی مثبت عدد  
 ہے متغیر لا کی تمام قیمتوں کے لیے مسلل ہے۔

$$۲۲ کو ۲ - مثال ۲ —  $\frac{۳ - لا}{۲} = \text{ا}$$$

اگر لا کی قیمت کو بدل کر لا + ہ کر دیا جائے تو ا کی قیمت

بدل کر  $\frac{۳-(۵+۵)}{۵+۵}$  ہو جاتی ہے اور اس لیے ماکہ قیمت میں تبدیلی  
ک ہو تو

$$ک = \frac{۳-(۵+۵)}{۵+۵} - \frac{۳-(۵+۵)}{۵+۵} = \frac{۳-(۵+۵)}{۵+۵} - \frac{۳-(۵+۵)}{۵+۵} = \frac{۳-(۵+۵)}{۵+۵} = \frac{۳-۱۰}{۱۰} = \frac{-۷}{۱۰}$$

یعنی ماکہ قیمت میں تبدیلی  $\frac{۳-۱۰}{۱۰}$  ہوتی ہے۔ اب اگر کوئی چھوٹا  
ثبوت مدد دیا ہوا ہو تو ماکہ قیمت میں یہ تبدیلی صہ سے کم ہوگی یعنی

$$صہ > \frac{۳-۱۰}{۱۰}$$

اگر

$$صہ > ۳$$

یعنی اگر

$$صہ > (۳-۱۰)$$

یعنی اگر

$$\frac{صہ}{۳-۱۰} > ۱$$

اب چاہے صہ کتنا ہی چھوٹا کیوں نہ ہو صہ کو ہم اس طرح منتخب  
کر سکتے ہیں کہ وہ  $\frac{صہ}{۳-۱۰}$  سے چھوٹا ہو سوائے اس صورت کے جبکہ صہ صفر کے  
مساوی ہو کیونکہ اس صورت میں صہ ایک مثبت عدد جو صفر سے چھوٹا ہو نہیں  
مل سکتا۔ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ دیا ہوا تفاعل  $\frac{۳-۱۰}{۱۰}$  متغیر لا کی تمام قیمتوں  
کے لیے سوائے  $صہ = ۳$  کے مسلسل ہے اور نقطہ  $صہ = ۳$  پر غیر مسلسل ہے۔  
اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ اگر ایک تفاعل ف (لا) متغیر لا کی کسی خاص  
قیمت کے لیے لاتنا ہی ہو جائے تو اس قیمت کے لیے تفاعل ف (لا) غیر مسلسل ہے۔

اس لیے تفاعل  $\lambda = ۱$  جہاں  $n$  کوئی منفی عدد ہے نقطہ  $\lambda = ۰$  پر غیر مسلسل ہے اور اس نقطہ کے علاوہ  $\lambda$  کی تمام قیمتوں کے لیے مسلسل ہے۔

مثال ۳ :-  $\lambda = ۱$  جب  $\lambda$

اگر  $\lambda$  کی قیمت کو بدل کر  $\lambda + ۱$  کر دیا جائے تو جب  $\lambda$  بدل کر جب  $(\lambda + ۱)$  ہو جاتا ہے اور اس لیے  $\lambda$  میں تبدیلی جب  $(\lambda + ۱)$  - جب  $(\lambda)$  ہو جاتی ہے۔ لیکن ہم کو معلوم ہے کہ اگر  $\lambda$  اور  $b$  کوئی دو زاویے ہوں تو

$$\text{جب } \lambda - \text{جب } b = ۲ \text{ جم } \frac{\lambda + b}{۲} \text{ جب } \frac{\lambda - b}{۲}$$

پس

$$\lambda \text{ میں تبدیلی} = ۲ \text{ جم } \frac{\lambda + ۱ + \lambda}{۲} \text{ جب } \frac{\lambda + ۱ - \lambda}{۲}$$

$$= ۲ \text{ جم } (\lambda + \frac{۱}{۲}) \text{ جب } \frac{۱}{۲}$$

اب اگر  $\lambda$  کوئی چھوٹا مثبت عدد دیا ہوا ہو تو  $\lambda$  میں یہ تبدیلی  $\lambda$  سے کم ہوگی بشرطیکہ  $۲ \text{ جم } (\lambda + \frac{۱}{۲}) \text{ جب } \frac{۱}{۲} > \lambda$

یعنی اگر

$$\text{جب } \frac{۱}{۲} > ۲ \text{ جم } (\lambda + \frac{۱}{۲})$$

یعنی اگر

$$\text{جب } \frac{۱}{۲} > ۲ \text{ جم } \lambda$$

یعنی اگر

$$\lambda > ۲ \text{ جب } \frac{۱}{۲} (\frac{۱}{۲} \text{ جم } \lambda)$$

پس ہم دیکھتے ہیں کہ اگر  $\lambda$  مساوی نہیں ہے  $\frac{۱}{۲}$  کے کسی طاق ضلع کے تو ہم  $\lambda$

کا اس طرح انتخاب کر سکتے ہیں کہ  $\lambda > ۲ \text{ جب } \frac{۱}{۲} (\frac{۱}{۲} \text{ جم } \lambda)$  اور  $\lambda$  کی اس قیمت

کے لیے مابین تبدیلی صہ سے کم ہوگی۔  
اب اگر لامساوی ہے  $\frac{پ}{م}$  تو  $\frac{پ}{م}$  کو بدل کر  $\frac{پ}{م} + م$  کرنے میں مابین قیمت  
میں تبدیلی

جب  $(\frac{پ}{م} + م) - \frac{پ}{م} = \text{جم م} - ۱$   
ہوگی اور یہ تبدیلی مطلق قیمت میں صہ سے کم ہوگی بشرطیکہ  
۱۔ جم م > صہ

یعنی اگر

جم م < ۱ - صہ

پس م کا اس طرح انتخاب کرنا چاہیے کہ جم م کم از کم (۱ - صہ) کے برابر ہو۔ م کی  
اس قیمت کے لیے مابین تبدیلی صہ سے کم ہوگی۔  
غرض کہ صہ سے لے کر  $\infty$  تک لاکھ قیمتوں کے لیے  
عدد م کا ہم اس طرح انتخاب کر سکتے ہیں کہ جب لاکھ قیمت میں تبدیلی  
جب (لا + م) - جب لا دیے ہوئے اختیاری چھوٹے مثبت عدد صہ سے  
کم ہو۔ پس تفاعل جب لامتغیر لاکھ تمام قیمتوں کے لیے مسلسل ہے۔

۲۲، ۲۳ - مثال ۴: م = مس لا

اگر لاکھ قیمت کو بدل کر (لا + م) کر دیا جائے تو مس لا بدل کر  
مس (لا + م) ہو جاتا ہے اور اس لیے مابین تبدیلی مس (لا + م) - مس لا  
ہو جاتی ہے۔

پس مابین تبدیلی = مس (لا + م) - مس لا

=  $\frac{\text{مس لا} + \text{مس م}}{\text{۱} - \text{مس لا}} - \text{مس لا}$

=  $\frac{\text{مس لا} + \text{مس م}}{\text{۱} - \text{مس لا}} - \text{مس لا}$

=  $\frac{\text{مس م}}{\text{۱} - \text{مس لا}} = \frac{\text{مس م}}{\text{۱} - \text{مس لا}}$

$$\frac{\text{مس}}{\text{جم لا (ا-مس لا مس)}} =$$

مس =  
جم ۲۰ - جب لا جم لا مس

اب اگر صد کوئی دیا ہوا اختیاری چھوٹا ثابت عدد ہو تو میں یہ تبدیلی صد سے کم ہوگی بشرطیکہ

ج۲ لا۔ جب لاجم لا مس

یعنی اگر مس (۱ + ص جب لاجم لا) > ص جم لا

یعنی اگر  $\frac{\text{صہ حجم لا}}{\text{+ صہ جب لا حجم لا}} > \text{صہ}$

ہم کو ہم اس قدر چھوٹا مثبت انتخاب کر سکتے ہیں کہ مس  $\frac{1}{2}$  سے کم ہو جائے۔  
 سوائے اس صورت کے جبکہ لا قیمت  $\frac{1}{2}$  کا کوئی طاق ضعف ہو۔ کیونکہ اگر  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  تو  
 جم  $\frac{1}{2} = 0$  اور  $\frac{1}{2}$  ایک مثبت عدد ایسا انتخاب نہیں کیا جاسکتا کہ مس  $\frac{1}{2}$  سے کم ہو جائے۔  
 پس معلوم ہوا کہ تفاعل مس لا متغیر لا کا ایک مسلسل تفاعل ہے۔ لاکہ تمام  
 قیمتوں کے لیے سوائے حسب ذیل قیمتوں کے:

$$\frac{\pi}{r} \pm \dots \pm \frac{\pi}{r} \pm \frac{\pi}{r} \pm \frac{\pi}{r} \pm \frac{\pi}{r} = 0$$

اگر لا قیمت  $\frac{3}{4}$  سے صرف ذرا سا کم ہے تو اس لا کی قیمت ایک بہت بڑا مثبت عدد ہے اور اگر لا قیمت  $\frac{3}{4}$  سے صرف ذرا سا بڑا ہے تو اس لا کی قیمت ایک بہت بڑا منفی عدد ہے جو تفاعل مس لا کی ترسیم سے ظاہر ہے۔ پس لا کی قیمت میں  $\frac{3}{4}$  کی بائیں طرف سے سیدھی طرف ذرا سا فرق پیدا کرنے پر مس لا کی قیمت میں بہت بڑا فرق پیدا ہو جاتا ہے جو تسلسل کی تعریف کے خلاف ہے۔ اس لیے مس لا نقطہ  $\frac{3}{4}$  اور اسی طرح  $\pm \frac{1}{4}$  (نطاق عدد) کے لیے غیر مسلسل ہے۔ باقی تمام نقطوں کے لیے جیسا کہ اوپر ثابت کیا گیا مس لا مسلسل ہے۔

## مشقی سوالات ۵

(۱) تعریف کی رو سے ثابت کرو کہ ذیل کے تفاعل لاکي تمام قیمتوں کے لیے مسلسل ہیں:—

$$(۱) ۱ = ۳ + ۴ لاکي (ب) ۱ = ۲ + لاکي - لاکي (ج) ۱ = ۴ + لاکي$$

$$(د) ۱ = \frac{۱}{۱+۲+۳} لاکي (ه) ۱ = ۴ + لاکي جب لاکي$$

(۲) ثابت کرو کہ تفاعل  $۱ = ۴ + لاکي$  لاکي تمام قیمتوں کے لیے مسلسل ہے سوائے حسب ذیل قیمتوں کے:

$$۱ = ۴ + لاکي \pm ۴ \pm ۳ \pm ۲ \pm ۱ \dots \pm ۴ \pm ۳ \pm ۲ \pm ۱ (ن مثبت صحیح عدد)$$

(۳) ثابت کرو کہ تفاعل  $۱ = ۴ + لاکي$  لاکي تمام قیمتوں کے لیے مسلسل ہے سوائے حسب ذیل قیمتوں کے:

$$۱ = ۴ + لاکي \pm ۴ \pm ۳ \pm ۲ \pm ۱ \dots \pm ۴ \pm ۳ \pm ۲ \pm ۱ (ن طاق عدد)$$

(۴) ثابت کرو کہ تفاعل  $۱ = ۴ + لاکي$  لاکي تمام قیمتوں کے لیے مسلسل ہے سوائے حسب ذیل قیمتوں کے:

$$۱ = ۴ + لاکي \pm ۴ \pm ۳ \pm ۲ \pm ۱ \dots \pm ۴ \pm ۳ \pm ۲ \pm ۱ (ن مثبت صحیح عدد)$$

(۵) بتاؤ کہ ذیل کے تفاعل کن نقطوں پر غیر مسلسل ہیں:—

$$(۱) ۱ = ۴ + لاکي (ب) ۱ = \frac{۱}{۳-۲+۱} لاکي (ج) ۱ = ۴ + لاکي$$

$$(د) ۱ = \frac{۱}{۱۳-۱۲+۱۱} لاکي (ه) ۱ = \frac{۱}{۱+۲+۳} لاکي (و) ۱ = ۴ + لاکي جب لاکي$$

(۶) تفاعل  $۱ = ۴ + لاکي$  کو نقطہ  $۱ = ۳$  پر کونسی قیمت دینی چاہیے کہ یہ تفاعل لاکي تمام قیمتوں کے لیے مسلسل ہو جائے۔

$$(۷) ثابت کرو کہ تفاعل  $۱ = \frac{۱-۲}{(۱-۲)^۲}$  نقطہ  $۱ = ۱$  پر$$

غیر مسلل ہے۔

(۸) ثابت کرو کہ تفاعل لا + لا ۲ - لا ۳ نقطہ لا = ۲ پر مسلل ہے۔

(۹) ثابت کرو کہ تفاعل لا - لا ۱ نقطہ لا = ۱ پر غیر مسلل ہے۔

(۱۰) ثابت کرو کہ تفاعل لا ۲ + لا ۳ - لا ۴ نقطہ لا = ۱ پر مسلل ہے۔

(۱۱) ثابت کرو کہ تفاعل لا ۱ + لا ۲ - لا ۳ نقطہ لا = ۲ پر مسلل ہے لیکن

نقطہ لا = ۱ پر غیر مسلل ہے۔

(۱۲) ثابت کرو کہ تفاعل لا ۲ - لا ۳ - لا ۴ نقطہ لا = ۳ پر غیر مسلل ہے۔

(۱۳) ثابت کرو کہ تفاعل لا ۲ - لا ۳ - لا ۴ نقطہ لا = ۲ کے سوا باقی تمام نقطوں پر

مسلل ہے۔

## ۳ و ۲۔ مسلل تفاعلوں کے متعلق مسائل۔

۳ و ۲۔ مسئلہ ۱۔ اگر تفاعل ف (لا) اور فہ (لا)

نقطہ لا = ۱ پر مسلل ہوں تو تفاعل ف (لا) + فہ (لا) بھی نقطہ لا = ۱ پر

مسلل ہوگا۔ چونکہ تفاعل ف (لا) نقطہ لا = ۱ پر مسلل ہے اس لیے تعریف کی روش سے

نہا ف (لا) = ف (۱) ..... (۱)

اسی طرح چونکہ تفاعل فہ (لا) نقطہ لا = ۱ پر مسلل ہے اس لیے

نہا فہ (لا) = فہ (۱) ..... (۲)

اب ہمیں دفعہ ۵ و ۱ کے مسئلہ (۱) کی روش سے معلوم ہے کہ دو تفاعلوں کے حاصل جمع کی انتہا انتہاؤں کے مجموعہ کے مساوی ہوتی ہے پس (۱) اور (۲) سے

نہا {ف (لا) + فہ (لا)} = {ف (۱) + فہ (۱)} ..... (۳)



لیکن  $\{ف (۱) + فہ (۱)\}$  قیمت ہے تفاعل  $\{ف (لا) + فہ (لا)\}$  کی نقطہ لا = و پر یعنی اس تفاعل کی قیمت اور انتہا دونوں ایک ہی ہیں پس تعریف کی رُو سے تفاعل  $\{ف (لا) + فہ (لا)\}$  کی نقطہ لا = و پر مسلسل ہے۔

۳۳ و ۳۴۔ مسئلہ ۲۔ اگر تفاعل  $ف (لا)$  اور  $فہ (لا)$  نقطہ لا = و پر

مسلسل ہوں تو تفاعل  $ف (لا) - فہ (لا)$  بھی نقطہ لا = و پر مسلسل ہوگا۔  
دفعہ گذشتہ کی طرح تعریف کی بناء پر ہم کو حاصل ہوتا ہے کہ

نہا  $ف (لا) = ف (۱)$  ، نہا  $فہ (لا) = فہ (۱)$ ۔  
لیکن دفعہ ۳۴ کے مسئلہ (۲) کی رُو سے

نہا  $\{ف (لا) - فہ (لا)\} = \{ف (۱) - فہ (۱)\}$

یعنی تفاعل  $ف (لا) - فہ (لا)$  کی انتہا اور قیمت ایک ہی ہیں پس تفاعل  $ف (لا) - فہ (لا)$  نقطہ لا = و پر مسلسل ہے۔

۳۳ و ۳۴۔ مسئلہ ۳: اگر تفاعل  $ف (لا)$  اور  $فہ (لا)$  نقطہ لا = و

پر مسلسل ہوں تو تفاعل  $ف (لا) - فہ (لا)$  بھی نقطہ لا = و پر مسلسل ہوگا۔  
بہیں دیا ہوا ہے کہ

نہا  $ف (لا) = ف (۱)$  ، نہا  $فہ (لا) = فہ (۱)$

لیکن دفعہ ۳۴ کے مسئلہ (۳) کی رُو سے دو تفاعلوں کے حاصل ضرب کی انتہا، انتہاؤں کے حاصل ضرب کے مساوی ہوتی ہے پس

نہا  $\{ف (لا) \times فہ (لا)\} = \{ف (۱) \times فہ (۱)\}$

یعنی تفاعل  $ف (لا) \times فہ (لا)$  کی قیمت اور انتہا دونوں ایک ہی ہیں پس



$$(۵) ۱ = جب ۱$$

$$(۶) ۱ = \frac{جب ۱}{۲ + جب ۱}$$

$$(۷) ۱ = جب ۱ لا (م اور ن مثبت صحیح اعداد ہیں)$$

۴ و ۲۔ چند اہم انتہا میں

$$۳ و ۲۔ ۱ - ۱$$

اس میں لا ایک معین عدد ہے جو  $-\infty$  سے  $+\infty$  تک کچھ ہی ہو سکتا ہے۔ لا کی ان قیمتوں کو ہم مختلف حصوں میں تقسیم کر سکتے ہیں اور ہم دیکھیں گے کہ لا کی مختلف قیمتوں کے لیے یہ انتہا مختلف حاصل ہوتی ہے۔  
(۱)  $۱ \leq ۱$  فرض کر دو کہ لا ایک مثبت عدد ہے جو اسے بڑا ہے تو ہم کہہ سکتے ہیں  $۱ = ۱ + ۱$  جہاں  $۱$  کوئی مثبت عدد ہے جو صفر سے بڑا ہے۔

$$پس ۱ = (۱ + ۱) = ۱ + ۱ + ۱ + \dots + ۱ + \frac{۱ - (۱ - ۱)}{۲} + ۱$$

اس لیے

$۱ < ۱ + ۱ + ۱ + \dots + ۱$  (ن کی تمام قیمتوں کے لیے جو اسے بڑی ہوں)  
اب چونکہ  $۱$  ایک ثابت عدد ہے اور ن بڑا ہوتا جاتا ہے۔ اس لیے ہم ن کو کافی بڑا لے کر ن  $۱$  کو جتنا چاہیں بڑا بنا سکتے ہیں۔ پس

$$۱ = ۱ + ۱ + ۱ + \dots + ۱$$

$$۱ = ۱ + ۱ + ۱ + \dots + ۱$$

$$(ب) ۱ = ۱ + ۱ + ۱ + \dots + ۱$$

$$۱ = ۱ + ۱ + ۱ + \dots + ۱$$

(ج)  $0 > لا > ۱$  : یعنی اگر لا ایک مثبت کسر واجب ہے۔

رکھو لا =  $\frac{۱}{۱}$  تو جبکہ لا صفر اور ۱ کے درمیان واقع ہوگا تو

ما ۱ اور  $۱ + \infty$  کے درمیان واقع ہوگا۔ پس چونکہ

$لا = \frac{۱}{۱}$  اور ما ۱ سے بڑا مثبت عدد ہے اس لیے ن کو

کافی بڑا لینے پر ما کو جس قدر چاہیں بڑا اور اس لیے  $\frac{۱}{۱}$  کو جتنا چاہیں  
چھوٹا کر سکتے ہیں۔

پس نہ  $لا = ۰$ ۔

(د)  $لا = ۰$  تو  $لا = ۰ = ۱$ ۔ ن کی تمام قیمتوں کے لیے اور اس لیے

نہ  $لا = ۰$ ۔

(ه)  $۱ > لا > ۰$  : یعنی لا ایک منفی کسر واجب ہے۔

رکھو لا = -۔ ما تو  $۰ > ما > ۱$  یعنی ما ایک مثبت کسر واجب

ہو جاتی ہے۔

پس  $لا = (۱ - ۱) = ۰$  کی رُو سے چونکہ ما ایک مثبت کسر واجب ہے اس لیے

نہ  $ما = ۰$ ۔

اس نہ  $لا = ۰$  نہ  $(۱ - ۱) = ۰$  نہ  $ما = ۰$ ۔

(و)  $۱ = لا$ ۔

پس  $لا = (۱ - ۱) = ۰$  یعنی تواتر کی رقمیں یکے بعد دیگرے

۱ اور ۱ کے مساوی ہیں اس لیے تواتر کسی انتہا کی طرف  
مائل نہیں ہوتا بلکہ اہتر از کرتا ہے اور نیز چونکہ تواتر کے کسی رکن کی قیمت

مطلق + ۱ سے بڑی نہیں ہوتی اس لیے کہا جاتا ہے کہ یہ تو اتر محدود انتہا تر از کرتا ہے۔

(ز)  $\frac{1}{a} > 1$  یعنی  $a$  کی قیمت - ۱ سے کم ہے۔  
 اگر ہم  $a = 1$  - مارکیں تو ظاہر ہے کہ  $a < 1$   
 پس  $\frac{1}{a} = 1 -$

اب صورت (۱) کے بموجب چونکہ  $a < 1$  اس لیے

$$\frac{1}{a} = 1 - \infty$$

اس لیے ہم دیکھتے ہیں کہ تو اتر  $\frac{1}{a}$  کے طاق ارکان -  $\infty$  کے اور جفت ارکان  $1 -$  کی طرف مائل ہوتے ہیں اس لیے تو اتر  $\frac{1}{a}$  کی انتہا نہ تو کوئی محدود عدد ہے اور نہ  $1 -$  اس کے علاوہ مطلق قیمت میں تو اتر کی رقیں بڑھتی چلی جاتی ہیں اس لیے کہا جاتا ہے کہ اگر  $a > 1$  تو اتر  $\frac{1}{a}$  غیر محدود انتہا تر از کرتا ہے۔

۲، ۴، ۶ -  $\frac{1}{a} = \frac{1}{1 - \frac{1}{a}}$  جہاں  $n$  کوئی منطوق عدد ہے اس کے ثبوت کو ہم  $n$  کی قیمت کے لحاظ سے ۳ حصوں میں تقسیم کرتے ہیں بموجب اس کے کہ  $n$  مثبت صحیح عدد ہے یا مثبت کسر ہے یا کوئی منفی عدد ہے۔

(۱) فرض کر دو کہ  $n$  کوئی مثبت صحیح عدد ہے۔ تب ہم تصدیق کر سکتے

ہیں کہ

$$(1 - \frac{1}{a}) (1 - \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^4} - \dots + \frac{1}{a^{2n}} - \frac{1}{a^{2n+1}}) = 1 - \frac{1}{a^{2n+1}}$$

$$\text{یعنی } \frac{1}{1 - \frac{1}{a}} = 1 - \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^4} - \dots + \frac{1}{a^{2n}} - \frac{1}{a^{2n+1}} \dots (1)$$

چاہے  $a$  اور  $\frac{1}{a}$  کوئی حقیقی عدد ہوں اور  $n$  کوئی مثبت صحیح عدد ہو جملہ (۱) ہمیشہ صحیح ہے بشرطیکہ  $a \neq 1$ ۔ لیکن چونکہ انتہا لینے میں بھی ہم  $a$  کو کبھی  $1$  کے بالکل برابر نہیں کرتے اگرچہ جس قدر چاہیں قریب لاتے ہیں اس لیے



$$= \frac{م}{ق} (ب ق) - ۱$$

$$= \frac{م}{ق} (ر ق) - ۱ \quad [کیونکہ ب ق = ۱]$$

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر ن مثبت کسر ہو تب بھی

$$نمبا = \frac{لا - رن}{ر - لا} = ن - ر$$

(۳) بالآخر اگر ن ایک منفی عدد ہے جو چاہے صحیح ہو یا کسر تو ہم لکھتے ہیں  $ن = - م$  جہاں م ایک مثبت صحیح یا کسری عدد ہوگا۔

$$اب \quad \frac{لا - رن}{ر - لا} = \frac{لا - (-م)}{ر - لا} = \frac{لا - م}{ر - لا}$$

$$= \frac{لا - م}{(ر - لا)}$$

$$پس \quad نمبا = \frac{لا - رن}{ر - لا} = \frac{لا - م}{(ر - لا)} (-) = \frac{لا - م}{ر - لا}$$

$$= - \frac{۱}{م} \cdot م - ر - ۱ \quad [کیونکہ م مثبت عدد ہے]$$

$$= - م - ر - ۱$$

$$= ن - ر - ۱ \quad [کیونکہ - م = ن]$$

پس ن کی تمام مثبت یا منفی صحیح اور کسری قیمتوں کے لیے مسئلہ صحیح ہے۔

نتیجہً صریح۔ مذکورہ بالا مسئلہ میں لا اور کوئی دو حقیقی عدد ہیں

صرف شرط یہ ہے کہ لا مائل نہ ہو تا ہے۔ اس میں ہم لا کی بجائے لا + م اور او کی بجائے لا رکھتے ہیں۔ اور اس لیے لا مائل نہ ہو کی بجائے (لا + م) مائل نہ ہو لا ہوتا ہے۔ اب ظاہر ہے کہ جس وقت لا + م مائل نہ ہو تو وہ کی قیمت چھوٹی

ہو جاتی ہے یعنی  $n$  مائل بہ صفر ہوتا ہے پس اوپر کا مسئلہ صریحاً ذیل ہو جاتا ہے:-

$$n \leftarrow \infty \quad \frac{(n+1)^n - n^n}{n^{n+1} - n^n} = \frac{n^n}{n^{n+1} - n^n} = \frac{1}{n - 1}$$

$$\text{یعنی} \quad n \leftarrow \infty \quad \frac{(n+1)^n - n^n}{n^{n+1} - n^n} = \frac{1}{n - 1}$$

اس میں لا کوئی حقیقی عدد ہے اور  $n$  کوئی مثبت یا منفی صحیح یا کسری عدد ہے۔ یہ نتیجہ بہت اہم ہے اور طالب علم کو چاہیے کہ اسے اچھی طرح سمجھے اور ذہن نشین کر لے۔

۳، ۲، ۱۔  $n \leftarrow \infty \quad \frac{n^n}{n^n} = 1$ ۔ جہاں لا کوئی ثابت حقیقی عدد ہے۔ اس کو ہم اس طرح بھی لکھ سکتے ہیں:

$$\frac{n^n}{n^n} = \frac{n}{1} \times \frac{n}{2} \times \frac{n}{3} \times \dots \times \frac{n}{n} \quad (1)$$

اب لا چاہے کتنا ہی بڑا عدد ہو پھر بھی وہ محدود ہے اور  $n$  چونکہ غیر محدود بڑھتا چلا جاتا ہے اس لیے ہم ایک  $n$  ایسا معلوم کر سکتے ہیں کہ  $n < 2$  لاینے  $\frac{n}{2} > \frac{1}{2}$ ۔ اب فرض کرو کہ  $n = m - 1$ ، تب

$$\frac{n^n}{n^n} = \left\{ \frac{n}{1} \times \frac{n}{2} \times \frac{n}{3} \times \dots \times \frac{n}{m-1} \right\} \times \left\{ \frac{n}{m-1} \times \frac{n}{m} \times \frac{n}{m+1} \times \dots \times \frac{n}{n} \right\} \quad (2)$$

اس میں  $n$  ایک محدود عدد ہے اس لیے  $\left( \frac{n}{1} \times \frac{n}{2} \times \frac{n}{3} \times \dots \times \frac{n}{m-1} \right)$  بھی ایک محدود ہے جو فرض کرو کہ اسے مساوی ہے۔ نیز چونکہ

$\frac{n}{n} > \frac{1}{2}$  اس لیے بدرجہ اولیٰ  $\frac{n}{n-1}, \frac{n}{n-2}, \dots, \frac{n}{m-1}$  سب کے سب کم ہونگے  $\frac{1}{2}$  سے۔ نیز چونکہ (۲) میں بائیں قوسین میں  $m$  اجزاء ہیں پس



$$(۳) \dots\dots\dots \frac{1}{۲} \cdot 1 > \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$$

اب جس وقت  $\frac{1}{n}$  بڑھتا چلا جائیگا تو ظاہر ہے کہ  $\frac{1}{n}$  بھی بڑھتا چلا جائیگا اور ہم کو معلوم ہے کہ  $\frac{1}{n}$  کو کافی بڑا لینے سے  $\frac{1}{۲}$  کو ہم جتنا چاہیں چھوٹا کر سکتے ہیں اس لیے  $\frac{1}{n}$  کو کافی بڑا لینے سے  $\frac{1}{n}$  کو بھی ہم جتنا چاہیں چھوٹا کر سکتے ہیں پس

$$\frac{1}{n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$$

$$۲، ۲، ۲ - \frac{1}{n} (1 + \frac{1}{n})$$

$\frac{1}{n}$  چونکہ ایک مثبت صحیح عدد ہے اس لیے سلسلہ ثنائی کی مدد سے پھیلانے پر حاصل ہوتا ہے:

$$(1 + \frac{1}{n}) = \frac{1}{n} + 1 + \frac{1}{n} \times \frac{(1-0)}{2 \times 1} + \frac{1}{n} \times \frac{(1-0)(1-0)}{3 \times 2 \times 1} + \dots + (1 + \frac{1}{n})$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + (1 + \frac{1}{n})$$

اب جوں جوں  $\frac{1}{n}$  بڑھتا جاتا ہے اس سلسلہ کی رقیں بڑی ہوتی جاتی

ہیں کیونکہ  $(1 - \frac{1}{n})$  وغیرہ بڑی ہوتی جاتی ہیں۔ اس کے علاوہ رقبوں کی تعداد بھی بڑھتی جاتی ہے اس سے معلوم ہوتا ہے کہ  $\frac{1}{n}$  کے بڑھنے کے ساتھ ساتھ توانر  $(1 + \frac{1}{n})$  بھی بڑھتا جاتا ہے یعنی یہ ایک صعودی توانر ہے۔ اس کے علاوہ ہم فوراً دیکھ سکتے ہیں کہ اس کی قیمت ۲ سے بڑی ہے جبکہ  $\frac{1}{n}$  کافی بڑا لیا جائے۔ نیز اگر  $(1 + \frac{1}{n})$  کے سلسلہ (۱) کا ذیل کے سلسلہ (۲) سے رقم بہ رقم مقابلہ کیا جائے تو معلوم ہوتا ہے کہ توانر  $\frac{1}{n}$  کی ہر قیمت کے لیے (۲) کے بائیں سلسلہ سے کم ہے یعنی

$$(۲) \dots\dots\dots \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{3 \times 2 \times 1} + \frac{1}{2 \times 1} + 1 + 1 > (1 + \frac{1}{n})$$

لیکن پہلی ۲ رقموں کے بعد خود (۲) کے بائیں سلسلہ کی ہر رقم ذیل کے سلسلہ (۳) سے کم ہے

$$(۳) \dots\dots\dots \frac{1}{1-10^2} + \dots + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2 \times 2} + \frac{1}{4} + 1 + 1$$

پس

$$\left\{ \frac{1}{1-10^2} \dots + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4} + 1 \right\} + 1 > \left( \frac{1}{n} + 1 \right)^n$$

$$\frac{\left( \frac{1}{4} \right)^n - 1}{\frac{1}{4} - 1} + 1 >$$

$$(۴) \dots\dots\dots \frac{1}{1-10^2} - 3 >$$

یعنی بدرجہ اولیٰ n کی تمام قیمتوں کے لیے

$$(۵) \dots\dots\dots 3 > \left( \frac{1}{n} + 1 \right)^n$$

پس ہم دیکھتے ہیں کہ  $\left( \frac{1}{n} + 1 \right)^n$  جو ایک صعودی تو اتر رہے ہمیشہ ۳ سے کم رہتا ہے اور اس لیے ہم یہ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ  $\left( \frac{1}{n} + 1 \right)^n$  کی انتہا موجود ہے جو ۲ اور ۳ کے درمیان واقع ہوتی ہے۔ اس انتہا کا کسی قدر تصور حاصل کرنے کے لیے n کی چند بڑھتی ہوئی قیمتوں کے لیے ہم تو اتر کی قیمت دریافت کر چکے۔

$$\text{اگر } n = 10 \text{ تو } \left( \frac{1}{n} + 1 \right)^n = (1.1)^{10} = 2.5937$$

$$\text{اگر } n = 100 \text{ تو } \left( \frac{1}{n} + 1 \right)^n = (1.01)^{100} = 2.7048$$

$$\text{اگر } n = 1000 \text{ تو } \left( \frac{1}{n} + 1 \right)^n = (1.001)^{1000} = 2.7169$$

$$\text{اگر } n = 10000 \text{ تو } \left( \frac{1}{n} + 1 \right)^n = (1.0001)^{10000} = 2.7181$$

$$\text{اگر } n = 100000 \text{ تو } \left( \frac{1}{n} + 1 \right)^n = (1.00001)^{100000} = 2.7182$$

جس سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر n غیر محدود بڑھتا چلا جائے تو  $\left( \frac{1}{n} + 1 \right)^n$  ایک انتہا کی طرف مائل ہوتا ہے جس کی قیمت ۲.۷۱۸ سے کسی قدر زیادہ ہے۔



یہ ثبوت چونکہ کسی قدر وقت طلب ہے اس لیے ہم اس کو یہاں بیان نہیں کریں گے۔ طالب علم کو اس منزل پر بطور مفروض کے یہ مان لینا چاہیے کہ  $(1 + \frac{1}{n})^n$  کی انتہا کے لیے ہم کو (۸) کے بائیں طرف کا سلسلہ حاصل ہوتا ہے جو مستحق ہے اور جس کی قیمت وہی عدد ہو ہے جو جملہ (۷) میں دیا گیا ہے۔ پس

$$نہا (1 + \frac{1}{n})^n = 1 + 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} + \dots + \infty \text{ ارقام}$$

$$=$$

$$(9) \dots\dots\dots ۲۶۷۱۸۲۸۱۸ =$$

$$۲۶۷۱۸۲۸۱۸ - نہا (1 + \frac{1}{n})^n - قوت نمائی تفاعل -$$

اس سلسلہ میں بھی  $n$  ایک مثبت صحیح عدد ہے اور لا کوئی حقیقی ثابت عدد ہے اس لیے مثلثاتی کی مدد سے پھیلائے پر ملتا ہے:

$$(1 + \frac{1}{n})^n = 1 + n \times \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} (\frac{1}{n})^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} (\frac{1}{n})^3 + \dots$$

$$+ \frac{n(n-1)\dots(1-n)}{r!} (\frac{1}{n})^r + \dots + (n+1) \text{ ارقام}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{1!} (1-1) + \frac{1}{2!} (1-1) + \dots + (\frac{1}{r!} - 1) + \dots$$

$$+ \frac{1}{r!} (1-1) + \dots + (\frac{1}{r!} - 1) + \dots + (1+n) \dots (1)$$

اوپر کی طسرح بغیر باضابطہ ثبوت دینے کے ہم یہ مان لیتے ہیں کہ  $n$  کی بڑی قیمتوں کے لیے بائیں طرف کے جملہ کی انتہا ذیل کا لامتناہی سلسلہ ہے:

$$نہا (1 + \frac{1}{n})^n = 1 + 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} + \dots + \infty \text{ ارقام} \dots (۲)$$

یہ بھی ثابت کیا جاسکتا ہے کہ یہ سلسلہ (۲) لامی تمام قیمتوں کے لیے مستحق ہے

لیکن یہ دونوں ثبوت کہ جملہ  $(1 + \frac{1}{n})$  کی انتہا (۲) کا سلسلہ ہے اور یہ کہ یہ سلسلہ لا کی تمام قیمتوں کے لیے مستحق ہے ہم کسی آئندہ موقع پر بیان کرینگے۔ فی الحال طالب علم کو چاہیے کہ ان سلسلوں کو اچھی طرح یاد رکھے اور یہ ذہن نشین کر لے کہ اگرچہ  $1 - \frac{1}{n} \dots \frac{2}{n} - 1 - \frac{1}{n}$  میں سے ہر ایک کی انتہا ۱ ہے لیکن جب ان اجزائے ضربی کی تعداد بہت بڑی یعنی لاتناہی ہوجاتی ہے تو ہم نہیں کہہ سکتے کہ حاصل ضرب کی انتہا بھی ۱ ہوگی۔

اسی کے ساتھ ہم  $(1 + \frac{1}{n})$  کی انتہا ایک دوسری شکل میں حاصل کرینگے۔

اگر  $لا = ۰$  تو  $(1 - \frac{1}{n}) = ۱$  اور اس لیے نہ  $(1 + \frac{1}{n}) = ۱$  اور اگر  $لا \neq ۰$  تو ہم رکھتے ہیں  $ن = م لا پس چونکہ لا ایک محدود ہے اس لیے جوں جوں ن بڑھتا جاتا ہے اسی طرح م بھی بڑھتا جاتا ہے یعنی جبکہ  $ن \rightarrow \infty$  تو  $م \rightarrow \infty$  پس$

$$(1 + \frac{1}{n}) = (1 + \frac{لا}{م})$$

$$= \{ (1 + \frac{1}{م}) \} \dots \dots \dots (۳)$$

اب اگرچہ ن مثبت صحیح عدد ہے لیکن لا چونکہ کوئی حقیقی عدد ہو سکتا ہے اس لیے ضروری نہیں ہے کہ م صحیح عدد ہو۔ ہم نے دفعہ گذشتہ میں ثابت کیا ہے کہ ن جب مثبت صحیح عددوں سے مائل بہ لاتناہی ہوتا ہے تو  $(1 + \frac{1}{n})$  کی انتہا ۱ ہوتی ہے۔ لیکن یہ بھی ثابت کیا جاسکتا ہے کہ چاہے ن مثبت صحیح عدد ہو یا نہ ہو نہ  $(1 + \frac{1}{n})$  ہمیشہ ۱ کے مساوی ہوتی ہے۔

پس اگر م کوئی عدد ہو تو

$$م نہ  $(1 + \frac{1}{م}) = ۱$  (۴)$$

اس لیے مساوات (۳) سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{نہیا}_{\infty \leftarrow n}^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \text{نہیا}_{\infty \leftarrow m}^m \left\{ \left(1 + \frac{1}{m}\right)^n \right\}$$

$$\left\{ \text{نہیا}_{\infty \leftarrow m}^m \left(1 + \frac{1}{m}\right) \right\}^n =$$

$$\text{نہیا}_{\infty \leftarrow m}^m \left(1 + \frac{1}{m}\right)^n \quad (۵)$$

جہاں  $n$  اسی طرح ایک قوت نما کو تعبیر کرتا ہے جیسے  $n$ ۔ پس ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ لاکھ تمام قیمتوں کے لیے

$$\text{نہیا}_{\infty \leftarrow n}^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots + \frac{1}{n^{n-1}} + \dots$$

$$\text{نہیا}_{\infty \leftarrow n}^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \text{نہیا}_{\infty \leftarrow n}^n (1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots) \quad (۶)$$

اس میں اگر ہم بطور خاص صورت کے  $n = 1$  رکھیں تو ملتا ہے کہ

$$\text{نہیا}_{\infty \leftarrow n}^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots$$

$$1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} + \dots$$

جو گزشتہ دفعہ کی مساوات (۹) میں حاصل ہوا تھا۔

اس کے علاوہ ہم اپنے بتلا چکے ہیں کہ اگر  $n = 1$  تو  $\text{نہیا}_{\infty \leftarrow n}^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$

$$\text{نہیا}_{\infty \leftarrow n}^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 \quad (۷)$$

نیز اگر  $n$  اور  $m$  کوئی دو عدد ہوں جو صفر نہ ہوں تو

$$\text{نہیا}_{\infty \leftarrow n}^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \text{نہیا}_{\infty \leftarrow m}^m \left(1 + \frac{1}{m}\right) \quad (۸)$$

اس میں رکھو  $n = m$  (یا  $m = n$ ) تو  $m \left(1 + \frac{1}{m}\right) = n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$  جبکہ  $n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = m \left(1 + \frac{1}{m}\right)$

$$\text{پس } \left( \frac{m+1}{n} + 1 \right) = \left( \frac{m+1}{(m+1)} + 1 \right)$$

$$\left\{ \left( \frac{1}{m} + 1 \right) \right\} =$$

$$\left\{ \left( \frac{1}{m} + 1 \right) \right\} \times \left\{ \left( \frac{1}{m} + 1 \right) \right\} =$$

اس لیے

$$\left\{ \left\{ \left( \frac{1}{m} + 1 \right) \right\} \times \left\{ \left( \frac{1}{m} + 1 \right) \right\} \right\} = \left( \frac{m+1}{n} + 1 \right)$$

$$\left\{ \left( \frac{1}{m} + 1 \right) \right\} \times \left\{ \left( \frac{1}{m} + 1 \right) \right\} =$$

$$= \dots \dots \dots (9)$$

پس مساواتوں (۸) اور (۹) سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\dots \dots \dots (10)$$

یہ مساوات (۱۰) چونکہ لا اور ما کی تمام قیمتوں کے لیے صحیح ہے اس لیے بطور خاص صورت کے ہم اس میں درج کرتے ہیں کہ ما = لا، تب

$$\dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots (11)$$

غرض ہم دیکھتے ہیں کہ تفاعل  $\omega$  تمام قوت نمائی قوانین کو پورا کرتا ہے۔  
تفاعل  $\omega$  کو "قوت نمائی تفاعل" کہتے ہیں۔

$\omega$  کے لیے جو سلسلہ  $1 + \omega + \frac{\omega^2}{2!} + \frac{\omega^3}{3!} + \dots$  حاصل ہوتا ہے

اس کی مدد سے باسانی دیکھا جاسکتا ہے کہ  $\omega$  کی تمام مثبت قیمتوں کے لیے تفاعل  $\omega$  کی قیمت مثبت ہوتی ہے اور اگر  $\omega$  منفی ہو یعنی  $\omega < 0$  کے برابر ہو جہاں  $\omega$  مثبت ہے تو  $\omega = 0$  اور چونکہ  $\omega$  مثبت ہے اس لیے  $\omega$  مثبت ہے اور اس لیے  $\omega$  بھی مثبت ہے۔ پس معلوم ہوا کہ  $\omega$  کی منفی قیمتوں کے لیے بھی تفاعل  $\omega$  کی قیمت مثبت ہوتی ہے۔ غرض کہ  $\omega$  کی قیمت ہمیشہ مثبت ہوتی ہے چاہے  $\omega$  مثبت ہو یا منفی

نیز اگر  $\omega < 0$  تو

$$\omega < 1 + \omega$$

اس لیے جوں جوں  $\omega$  بڑھتا جاتا ہے اسی طرح  $\omega$  بھی بڑھتا جاتا ہے یعنی

اب اگر  $\omega$  ایک منفی عدد ہو اور  $\omega$  کے مساوی ہو جہاں  $\omega$  مثبت عدد ہے تو

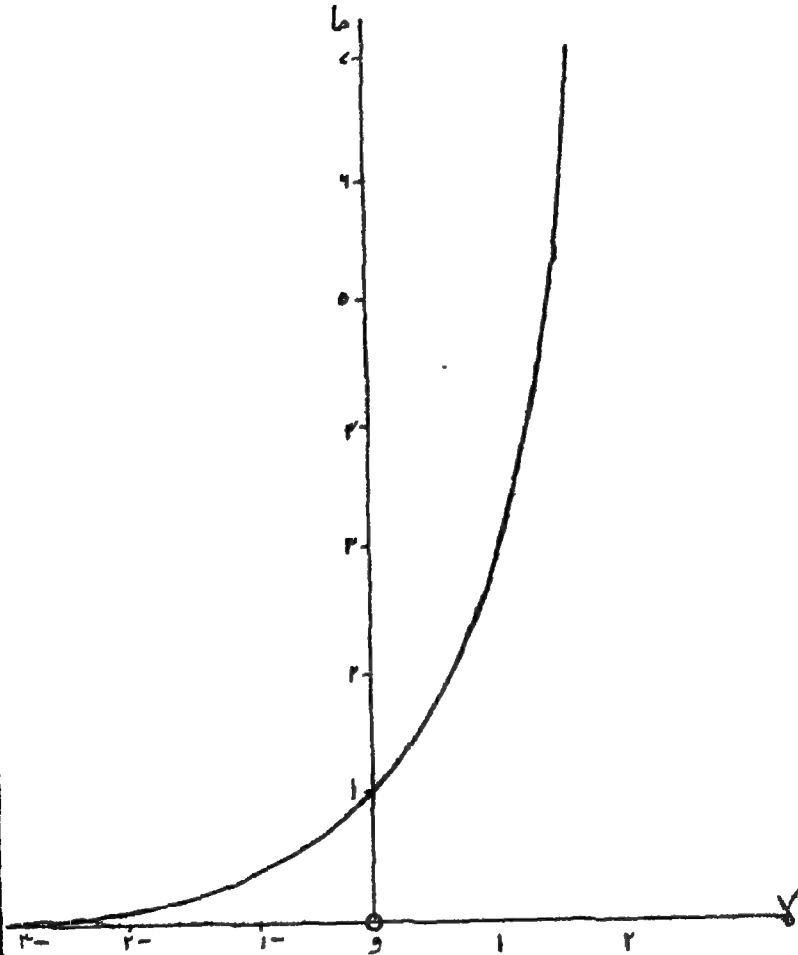
$$\omega = 0 = \omega + \omega$$

$$\omega = 0 = \omega + \omega$$

غرض کہ  $\omega$  کی چھوٹی سے چھوٹی قیمت صفر ہے جبکہ  $\omega = 0$  ہو اور اس کے بعد اس کی قیمت بڑھتی جاتی ہے یہاں تک کہ  $\omega = 0$  کے لیے قیمت  $\omega$  ہو جاتی ہے اور پھر بڑھتے ہوئے  $\omega = 0$  پر تفاعل  $\omega$  کی قیمت بھی  $\omega = 0$  ہو جاتی ہے۔ ذیل میں ہم اس تفاعل کی ترسیم دیتے ہیں جس سے منجھنی  $\omega = 0$  کی شکل طالب علم کو معلوم ہو جائیگی۔



شکل سے ظاہر ہے کہ لاکہ مثبت قیمتوں کے لیے تفاعل کو بہت جلد بڑھتا جاتا ہے



منفی  $a =$  واکہ کی ترسیم

اور لاکہ منفی قیمتوں کے لیے بہت جلد گھٹتا ہے۔ نیز یہ بھی فوراً معلوم ہوتا ہے کہ منفی مسلسل ہے یعنی تفاعل واکہ کی قیمت بتدریج مسلسل بدلتی ہے یعنی تفاعل واکہ کی تمام قیمتوں کے لیے مسلسل ہے۔ اس کا باضابطہ ثبوت بھی دیا جاسکتا ہے۔ اسی ضمن میں ہم ایک انتہائی قیمت معلوم کرینگے جس کی ہمیں آئندہ ضرورت

ہوگی۔

فرض کرو کہ وہ کوئی چھوٹا عدد ہے تب

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = 2$$

اس لیے

$$1 - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = 1$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

لیکن اگر  $1 > 1$  تو

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots > 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

پس  $1 > 1$  کی کافی چھوٹی قیمتوں کے لیے

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots > 1 + 1 + \dots \quad (14)$$

اب ظاہر ہے کہ ہر کی کافی چھوٹی قیمت لینے پر ہم  $1$  کو جتنا چاہیں چھوٹا کر سکتے ہیں یعنی  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$  کو  $1$  کے جتنا چاہیں قریب لاسکتے ہیں پس

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = 1 \quad (15)$$

۳۴ - نوکارتی تفاعل

تفہیم: یہ تفاعل اوپر کے قوت مافی تفاعل کا متعلق ہے  
 یعنی اگر ماکون حقیقی عدد ہو اور اگر  $1$  کی قیمت  $1$  کے مساوی ہو تو کہتے ہیں کہ  
 "نوکارتی" ہے لاکا اس سلسلہ کو "نوکارتی" اور اس کو "نوکارتی" کہتے ہیں۔ یعنی اگر  
 $1 = 1$  تو ..... (11)

تو

ما = لوک لا ..... (۲)

اس تفاعل کے مفہوم کو سمجھنے کے لیے فرض کرو کہ ہمیں ایک حقیقی عدد لا دیا گیا ہے ہم دریافت کرنا چاہتے ہیں کہ عدد و کو کس قوت پر اٹھایا جائے کہ حاصل لا تے اسی مطلوبہ قوت کو ہم لوک لا کہتے ہیں اور ما = لوک لا کو کارتی تفاعل کہتے ہیں۔ اس کو "شپیر کے لوکارتم" یا "طبعی لوکارتم" بھی کہتے ہیں اور لوک کے نیچے حرف و اس لیے لکھا جاتا ہے تاکہ اس کو معمولی لوکارتموں سے جو ۱۰ کے اساس پر لیے جاتے ہیں، تمیز کیا جاسکے۔ آئندہ ہم جب کہیں لوک لا لکھیں تو اس سے مراد یہی لوک لا ہوگی۔ اگر ہمیں ۱۰ کے اساس والے لوکارتم کی ضرورت ہو تو ہم اس کو ہمیشہ لوک لا سے تعبیر کریں گے۔

اب ہم تفاعل ما = لوک لا کی قیمتوں پر غور کریں گے۔ یہاں چونکہ

لا = و

اور دفعہ گذشتہ میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ اگر (۱) ما = و تو لا = و =

(۲) اگر ما = و لا = و = (۳) اور اگر ما = و + و لا = و تو و = و

یعنی جب ما = و سے شروع کر کے صفر میں سے ہوتے ہوئے و + و تک

جاتا ہے تو لا صفر سے شروع کر کے ایں سے ہوتے ہوئے و + و تک جاتا ہے۔ پس معلوم ہوا کہ

ما = لوک لا کی قیمت (۱) لا = و تو ما = و (۲) لا = و + و تو ما = و + و

اور (۳) لا = و تو ما = و ہے یعنی جب لا صفر سے شروع کر کے ایں سے ہوتے ہوئے

+ و تک جاتا ہے تو ما = و سے شروع کر کے صفر میں سے ہوتے

ہوئے و + و تک جاتا ہے۔ یعنی تفاعل لوک لا کی قیمت متغیر لا کی صرف

مثبت قیمتوں کے لیے موجود ہے اور لا کی منفی قیمتوں کے لیے لوک لا کی قیمت وجود

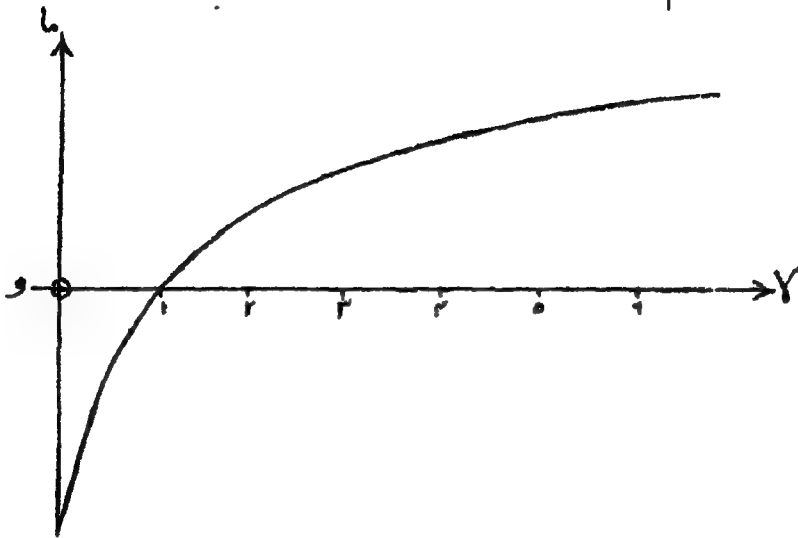
نہیں ہے۔ لا کی قیمت صفر تا ا کے لیے لوک لا کی قیمت منفی ہوتی ہے۔

لا = ا کے لیے لوک لا = و اور لا کی ا سے بڑی قیمتوں کے لیے لوک لا

مثبت ہوتا ہے اور لا کے ساتھ بڑا ہوتا جاتا ہے۔ منفی ما = لوک لا کی ترتیم

ذیل کی شکل میں دی گئی ہے جس سے معلوم ہوگا کہ لوک لا کا منفی سلسلہ ہے

یعنی لاکھی تمام مثبت قیمتوں کے لیے لوک لا ایک مسلسل تفاعل ہے۔



سخنی ۱ = لوک لا کی ترمیم

لوک لا کی اس تعریف کی بناء پر ہم کو حسب ذیل خاصیتیں حاصل ہوتی ہیں :-  
(۱) فرض کرو کہ لا = لو یعنی ما = لوک لا تب

$$\text{لوک لا} = \text{لو} = لا \dots\dots\dots (۳)$$

(ب) نیز  
لوک لو = لوک لا = ما \dots\dots\dots (۴)

یہ خاصیتیں جو مساواتوں (۳) اور (۴) سے تعبیر ہوتی ہیں بدیہی ہیں کیونکہ اعمال قوت نما اور لوکارتم متغلوب تفاعل ہیں۔ اور اس لیے اگر ہم ایک عدد لا کا لوکارتم لیں اور پھر لو کو اس لوکارتم کی قوت پر اٹھائیں تو ہمیں وہی ابتدائی عدد لا حاصل ہونا چاہیے۔ اس طرح ہم اگر کو ایک قوت ما پر اٹھائیں اور پھر اس ما کا لوکارتم لیں تو ہمیں وہی ابتدائی عدد ما حاصل ہونا چاہیے

کیونکہ یہ دونوں اعمال ایک دوسرے کو زائل کر دیتے ہیں۔

(ج) فرض کرو کہ  $\lambda$  اور  $b$  کوئی دو مثبت حقیقی عدد ہیں اور فرض کرو کہ

لا = نوک و ، ما = نوک ب

یعنی      مو = د      ب = ب

اب ہمیں معلوم ہے کہ

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

اس لیے  $1 \times b = 1 \text{ نوک} + 1 \text{ نوک} = 2 \text{ نوک}$

اس مساوات میں دونوں طرف لوکارتم لینے پر ملتا ہے کہ

$$\text{لوک لوک} = \text{لوک} + \text{لوک}$$

$$= \text{روک ۱} + \text{روک ۲} \dots\dots\dots (۵)$$

پس معلوم ہوتا ہے کہ دو عددوں کے حاصل ضرب کا لوکارتم ان عددوں کے لوکارتموں کے مجموعہ کے مساوی ہوتا ہے۔

(د) مساوات (۵) میں بچہ کو کئی عدد دے ہو سکتا ہے اس لیے

ہم لیتے ہیں کہ  $b = \frac{1}{a}$  جہاں کوئی مثبت عدد ہے، پس

$$\frac{1}{j} \text{ کوک} + 1 \text{ کوک} = \frac{1}{j} \times 1 \text{ کوک}$$

یعنی  $1 \text{ کوک} = 1 \text{ کوک} + \frac{1}{3} \text{ کوک}$

چونکہ لوگ اے ۔۔۔ اس لیے

$$\frac{1}{2} \text{ کوک} + 1 \text{ کوک} = \dots$$

یعنی نوک  $= \frac{1}{3}$  - نوک 1 ..... (۶)

(۷) اب فرض کرو کہ کوئی مثبت عدد ہے تو ہمیں معلوم ہے کہ

$$1 = 1$$



## مشقی سوالات ۶

ذیل کی انتہائیں دریافت کرو :-

$$(۱) \text{ نیب } \frac{۱-۱}{۱-۱} \text{ نیب } (۲) \frac{۱-۱}{۲-۱} \text{ نیب } (۳) \frac{۱-۱}{۳-۱} \text{ نیب } \frac{۱-۱}{۱-۱}$$

$$(۴) \text{ نیب } \frac{۱-۱}{۱-۱} \text{ نیب } (۵) \frac{۱-۱}{۱-۱} \text{ نیب } (۶) \frac{۱-۱}{۱-۱} \text{ نیب } \frac{۱-۱}{۱-۱}$$

$$(۷) \text{ نیب } \frac{۱-۱}{۱-۱} \text{ نیب } (۸) \frac{۱-۱}{۱-۱} \text{ نیب } \frac{۱-۱}{۱-۱}$$

$$(۹) \text{ نیب } \frac{۱-۱}{۱-۱} \text{ نیب } (۱۰) \frac{۱-۱}{۱-۱} \text{ نیب } \frac{۱-۱}{۱-۱}$$

$$(۱۱) \text{ نیب } \frac{۱-۱}{۱-۱} \text{ نیب } (۱۲) \frac{۱-۱}{۱-۱} \text{ نیب } \frac{۱-۱}{۱-۱}$$

$$(۱۳) \text{ نیب } \frac{۱-۱}{۱-۱} \text{ نیب } (۱۴) \frac{۱-۱}{۱-۱} \text{ نیب } (۱۵) \frac{۱-۱}{۱-۱} \text{ نیب } \frac{۱-۱}{۱-۱}$$

$$۴ و ۲ - \text{ نیب } \frac{۱-۱}{۱-۱} = ۱ \text{ اور نیب } \frac{۱-۱}{۱-۱} = ۱$$

(زاویہ ط کو نیم قطریوں میں ناپا گیا ہے)

ذیل کی شکل میں فرض کرو کہ ن و ا نیم قطریوں میں ایک زاویہ ط کہ تعبیر کرتا ہے جو ۳ سے کم ہے اور جو نصف قطر والے دائرہ کے مرکز و پر واقع ہے۔

فرض کرو کہ مرن ایک دائرہ کا وتر ہے جس کا مرکز و اور نصف قطر ہے۔  
ن ت نقطہ ن پر کا ماس اور مرن نقطہ م پر کا ماس ہے اور خط مستقیم و ت  
خط ن م کو نقطہ ب پر اور توس ن م کو نقطہ ا پر قطع کرتا ہے۔  
فرض کرو کہ زاویہ ن و ا = ط نیم قطری : تب ظاہر ہے کہ





یعنی طہ کی کافی چھوٹی قیمت لینے پر جم طہ کو جس قدر چاہیں ا کے قریب  
لا سکتے ہیں اور اس وقت جب طہ بدرجہ اولیٰ ا کے قریب آجائے گا اس لیے

$$\text{طہ} \leftarrow \text{نہا} = \frac{\text{جب طہ}}{\text{طہ}} = 1 \dots \dots \dots (۶)$$

اسی طرح اگر ناساوات (۷) کی ہر رقم کو مس طہ سے تقسیم کیا جائے تو ملتا ہے

$$\text{جم طہ} > \frac{\text{طہ}}{\text{مس طہ}} > 1$$

اور اگر اس میں رقموں کو الٹ دیا جائے تو

$$\frac{1}{\text{جم طہ}} < \frac{\text{مس طہ}}{\text{طہ}} < 1 \dots \dots \dots (۷)$$

$$\text{اب چونکہ} \text{نہا} \leftarrow \text{جم طہ} = \frac{1}{\text{جم طہ}} = \frac{1}{\text{مس طہ}} = 1$$

یعنی طہ کو کافی چھوٹا لینے پر جم طہ کو ہم جس قدر چاہیں ا کے قریب لا سکتے ہیں  
اس لیے مس طہ بدرجہ اولیٰ ا کے قریب آجاتا ہے پس

$$\text{طہ} \leftarrow \text{نہا} = \frac{\text{مس طہ}}{\text{طہ}} = 1 \dots \dots \dots (۸)$$

غرض کہ جب طہ اور مس طہ دونوں کی انتہا ا ہے جبکہ طہ ا ل بہ صفر  
جو فرق یہ ہے کہ جب طہ ہمیشہ ا سے چھوٹا رہتا ہے اور بڑھتے ہوئے  
بتدریج ا کے قریب آتا ہے۔ اس کے برخلاف مس طہ ہمیشہ ا سے  
بڑا رہتا ہے اور گھٹتے ہوئے بتدریج ا کی طرف آتا ہے۔

$$\text{نیز ہم دیکھتے ہیں کہ} \frac{\text{جب طہ}}{\text{طہ}} = \frac{\text{ب ن}}{\text{و ن}} \div \frac{\text{قوس ان}}{\text{و ن}} = \frac{\text{ب ن}}{\text{قوس ان}}$$

لیکن جب زاویہ طہ چھوٹا ہوتا ہے تو نقطہ ن محیط پر نقطہ ا کے قریب

آتا ہے اور اس لیے قوس ان اور نیز خط ب ن دونوں صفر کی طرف  
مائل ہوتے ہیں۔ یعنی اگرچہ نہیبا قوس ان = ۰  
اور نہیبا خط ب ن = ۰ لیکن

$$\text{نہیبا} = \frac{\text{ب ن}}{\text{قوس ان}} = ۱$$

پس معلوم ہوتا ہے کہ اگرچہ دو مقداریں خود بے حد چھوٹی کیوں نہ ہو جائیں  
ان کی نسبت ایک محدود عدد ہو سکتی ہے یعنی یہ ضروری نہیں ہے  
کہ دو بے حد چھوٹی مقداروں کی نسبت بھی چھوٹی ہو۔

ذیل میں ایک جدول کی مدد سے ہم بتلائیں گے کہ اگر طہ چھوٹا ہوتا ہے تو  
جب طہ کی کیا قیمت ہوتی ہے اور یہ نسبت کس طرح ا کے قریب ہوتی جاتی ہے۔  
اگر طہ = ۵ قوطہ = ۰۸۶۲۶۶۵، نیم قطری جب طہ = ۰۸۴۱۵۵۷، جب طہ = ۰۹۹۸۶۳

$$\text{طہ} = ۲ = ۰۳۴۹۰۶۶، \text{جب طہ} = ۰۳۲۸۹۹۵، \text{جب طہ} = ۰۹۹۹۸۰$$

$$\text{طہ} = ۱ = ۰۱۴۳۵۳۳، \text{جب طہ} = ۰۱۰۲۵۲۳، \text{جب طہ} = ۰۹۹۹۹۵$$

$$\text{طہ} = ۰ = ۰۰۸۴۲۶۶، \text{جب طہ} = ۰۰۸۴۲۶۵، \text{جب طہ} = ۰۹۹۹۹۹$$

$$\text{طہ} = ۱۰ = ۰۰۲۹۰۸۹، \text{جب طہ} = ۰۰۲۹۰۸۹، \text{جب طہ} = ۰۹۹۹۹۹۹$$

وغیرہ

نوٹ ۱۔ یاد رکھنا چاہیے کہ نہیبا جب طہ = ۱ صرف اسی صورت میں  
صحیح ہے جبکہ طہ کو نیم قطریوں میں ناپا جائے۔ اگر زاویہ لاکو درجوں میں ناپا جائے تو

$$\text{نہیبا جب لا} = \frac{\text{نہیبا جب لا}}{\text{لا}} = \frac{\pi}{180} \times \frac{\pi}{180} \times ۱ = \frac{\pi}{180} = ۰.۰۱۷$$

جیسا کہ ہم نے دفعہ ۵ و ۱ مثال ۲ میں بیان کیا تھا۔

دوسری بات یہ ہے کہ جس زاویہ کی جیب لے رہے ہیں اس کو  
اسی زاویہ سے تقسیم کرنے کے بعد اگر زاویہ کو صفر کی طرف مائل کریں تو

نسبت کی انتہا ۱ ہوتی ہے یعنی یہ صحیح نہیں ہے کہ  $\frac{نہب}{جب ۲} = ۱$  بلکہ اس انتہا کو یوں معلوم کرنا چاہیے:

$$\frac{نہب}{جب ۲} = \frac{نہب}{جب ۲} = \frac{۲}{۲} = ۱$$

یعنی  $\frac{نہب}{جب ۲}$  کی انتہا ۲ ہوتی ہے نہ کہ ۱۔

## مشقی سوالات ۷۔

ذیل کی انتہائیں دریافت کرو:-

$$(۱) \frac{نہب}{جب ۳} = \frac{نہب}{جب ۳}$$

$$(۲) \frac{نہب}{جب ۳} = \frac{نہب}{جب ۳}$$

$$(۳) \frac{نہب}{جب ۳} = \frac{نہب}{جب ۳}$$

$$(۴) \frac{نہب}{جب ۳} = \frac{نہب}{جب ۳}$$

$$(۵) \frac{نہب}{جب ۳} = \frac{نہب}{جب ۳}$$

# باب سوم

## تفرق اور تفرقی سر

۱ و ۳ :- اس باب میں متبوع متغیر کی قیمت میں تغیر کی وجہ سے تفاعل کی قیمت میں جو تبدیلی واقع ہوتی ہے اس پر غور کیا جائیگا۔ بالخصوص متبوع متغیر اور تفاعل کی قیمتوں میں تبدیلی کی نسبت لی جائیگی۔ اور اس سے بدلے کی شرح کا ناپ دریافت کیا جائیگا۔ یہ ناپ علم احصاء کی بنیاد ہے۔

۲ و ۳ :- فرق : فرض کرو کہ  $1 = f$  (لا) کوئی تفاعل ہے اس کے

کسی نقطہ لا = ۱ پر غور کرو۔ اب اگر متبوع متغیر لا کی قیمت ۱ + ۲ کردی جائے تو متبوع متغیر کی قیمتوں میں فرق ۲ ہے۔ اس امر کو علامتوں سے بیان کرنے کے لیے اگر محدود فرق کو اختصاراً "مف" سے تعبیر کیا جائے تو لکھ سکتے ہیں کہ مف لا = ۲ علامت مف لا سے لا کا محدود فرق مراد ہے۔ اس کو غلطی سے مف  $\times$  لا نہ سمجھ لیا جائے۔ اسی طرح ف (لا) میں نقطہ لا = ۱ پر فرق ہوگا ف (۱ + ۲) - ف (۱) جس کو مف [ف (۱) سے تعبیر کیا جاسکتا ہے۔ مثلاً مکانی ۱ = ۲ لا کے نقطہ لا = ۲ پر غور کرو۔ اس نقطہ کے محدود (۲، ۱۶) ہونگے۔ اب اگر لا کی قیمت ۳ ہو جائے تو ۱ = ۲۶ یعنی

مف لا = ۱ تو مف ۱ = ۲۰ اسی طرح

اگر مف لا = ۲ + تو مف ۱ = ۲۸

مفت لا =  $\frac{۳}{۴}$  مفت ما = ۱۵  
 اب مکانی کے ایک دوسرے نقطہ لا = ۵ غور کرو - ظاہر ہے کہ ما = ۱۰۰  
 اس پر اگر مفت لا = ۲ تو مفت ما = ۹۶  
 مفت لا =  $\frac{۳}{۴}$  مفت ما = ۵۱  
 مفت لا =  $\frac{۹}{۴}$  مفت ما = ۹۹ وغیرہ وغیرہ  
 اس سے ظاہر ہے کہ تابع متغیر کا فرق بالمعوم لا اور مفت لا دونوں کی قیمتوں پر  
 منحصر ہے - عام صورت میں اگر مکانی کا کوئی نقطہ (لا' ما) ہو تو  
 مفت ما = ۴ (لا + مفت لا) - ۴  
 = ۸ (لا + مفت لا) + ۴ (مفت لا)  
 یعنی مفت ما متبعوع متغیر لا اور اس کے فرق مفت لا دونوں کا تقاضا ہے اور  
 اس رشتہ میں لا اور مفت لا کی دی ہوئی قیمتیں درج کر کے مفت ما کی قیمتیں نکالی  
 جاسکتی ہیں -  
 اسی طرح اگر ما = ف (لا) کے کسی نقطہ (لا' ما) پر غور کریں تو  
 مفت ما = ف (لا + مفت لا) - ف (لا)

### توضیحی مثالیں

مثال (۱) ما = ۱ (۵ + ۷۴) میں مفت ما کی قیمت دریافت کرو جبکہ  
 لا = ۳ - اور مفت لا =  $\frac{۱}{۴}$   $\frac{۱}{۳}$   $\frac{۱}{۲}$   $\frac{۱}{۱}$   $\frac{۱}{۵}$   
 مفت ما =  $\frac{۳}{۴}$  (۵ + ۷۴) -  $\frac{۳}{۴}$  (۵ + ۷۴ + ۷۴ + ۷۴ + ۷۴ + ۷۴)  
 =  $\frac{۳}{۴}$  (۵ + ۷۴) -  $\frac{۳}{۴}$  (۵ + ۷۴ + ۷۴ + ۷۴ + ۷۴ + ۷۴)  
 =  $\frac{۳}{۴}$  (۵ + ۷۴) -  $\frac{۳}{۴}$  (۵ + ۷۴ + ۷۴ + ۷۴ + ۷۴ + ۷۴)  
 =  $\frac{۳}{۴}$  (۵ + ۷۴) -  $\frac{۳}{۴}$  (۵ + ۷۴ + ۷۴ + ۷۴ + ۷۴ + ۷۴)  
 اس میں لا = ۳ - درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے کہ  
 مفت ما = ۱۲ × ۷۴ - ۷۴ × ۷۴ + ۷۴ × ۷۴ + ۷۴ × ۷۴ + ۷۴ × ۷۴ + ۷۴ × ۷۴

$$\text{اس لیے مف لا} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$$

$$\text{مف ما} = 988 - 216 - 287 - 218 - 1385 = 235$$

$$\text{مثال (۲) ما} = \frac{3+12}{2-13} \text{ کے نقطہ لا} = 3 \text{ پر مف ما کی قیمت دریافت کرو}$$

$$\text{جبکہ مف لا} = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$$

$$\text{مف ما} = \frac{3+12}{2-13} - \frac{3+(12+\text{مف لا})}{2-(12+\text{مف لا})}$$

$$= \frac{(3+12)(2-13) - (3+12+\text{مف لا})(2-13)}{(2-13)(2-13)}$$

$$= \frac{3(2-13) - (2-13)(3+12+\text{مف لا})}{(2-13)(2-13)}$$

$$= \frac{3(2-13) - (2-13)(3+12+\text{مف لا})}{(2-13)(2-13)}$$

$$\text{نقطہ لا} = 3 \text{ پر مف ما} = \frac{3(2-13) - (2-13)(3+12+\text{مف لا})}{(2-13)(2-13)}$$

$$\text{یعنی مف لا} = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$$

$$\text{مف ما} = \frac{14}{126} - \frac{14}{148} - \frac{14}{28} - \frac{14}{40}$$

$$\text{مثال (۳) ما} = \text{جب لا + مس لا کے کسی نقطہ پر مف ما اور مف لا}$$

$$\text{میں رشتہ دریافت کرو۔ نیز اس کی قیمت معلوم کرو جبکہ لا} = \frac{\pi}{4} \text{ اور مف لا} = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{مف ما} = \text{جب (لا + مف لا) - جب لا + مس (لا + مف لا) - مس لا}$$

$$= \text{جم (لا + مف لا) جب} \frac{\text{مف لا}}{2} + \text{جب مف لا} \frac{\text{مف لا}}{2} + \text{جم (لا + مف لا) جم لا}$$

$$\text{اس لیے اگر لا} = \frac{\pi}{4} \text{ اور مف لا} = \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{مف ۱} &= ۲ \text{ جم } \frac{\pi}{۳} \text{ جب } \frac{\pi}{۱۲} + \frac{\frac{\pi}{۳} \text{ جب } \frac{\pi}{۳}}{\frac{\pi}{۳} \text{ جم } \frac{\pi}{۱۲}} \\ \frac{۲}{۱-\sqrt{۳}} + \frac{۱-\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} &= \frac{\frac{1}{\sqrt{۳}}}{\frac{1}{\sqrt{۳}} \times \frac{1-\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}}} + \frac{1-\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} \times \frac{1}{\sqrt{۳}} \times ۲ = \\ ۱+\sqrt{۳} + \frac{\sqrt{۳}-۳}{۳} &= \end{aligned}$$

اور اگر مف ۱ = -  $\frac{\pi}{۳}$

$$\begin{aligned} \text{تو مف ۱} &= ۲ \text{ جم } \frac{\pi}{۴} \text{ جب } \left(-\frac{\pi}{۱۲}\right) + \frac{\left(-\frac{\pi}{۴}\right) \text{ جب } \left(-\frac{\pi}{۱۲}\right)}{\frac{\pi}{۴} \text{ جم } \frac{\pi}{۱۲}} \\ \frac{\sqrt{۳}}{۱} \times \frac{\sqrt{۳}}{۱+\sqrt{۳}} \times \frac{1}{\sqrt{۳}} - \frac{1-\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} \times ۲ &= \\ ۱+\sqrt{۳} - \frac{\sqrt{۳}-۳}{۳} &= \frac{۲}{۱+\sqrt{۳}} - \frac{۳-\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = \end{aligned}$$

## مشقی سوالات ۸

(۱) مف ۱ کی قیمت دریافت کرو :-

(۱)  $(۳+۵۲) = ۱$  جبکہ لا = - ۱ مف لا =  $\frac{1}{۳} - \frac{1}{۳} - \frac{۵}{۳} - \frac{۲}{۳} = ۱ - ۲$

(ب)  $۱ = (۳-۵۲) + ۵$  لا جبکہ لا =  $\frac{۵}{۳}$  اور مف لا =  $\frac{1}{۳} - \frac{1}{۳} - \frac{۱}{۳} - \frac{۲}{۳} = \frac{۱}{۵} - ۲$

(۲) مف لا =  $\frac{۵+۳}{(۱-۵۳)}$  میں مف [ف (لا)] کی قیمت دریافت کرو -

جبکہ لا = -  $\frac{۵}{۳}$  اور مف لا =  $\frac{1}{۳} - \frac{1}{۳} - \frac{۱}{۳} - \frac{۲}{۳} = ۱ - ۲$

(۳) ص = ۲ - ۵ - ۳ میں مف ص کی قیمت دریافت کرو

جبکہ ی = ۲ اور مف ی = -  $\frac{۲}{۵} - \frac{۳}{۵}$

$$\left\{ \begin{array}{l} (۲) (۱) \text{ لا} = ۵ \text{ جم ط} \\ (ب) \text{ لا} = \text{جب ط} \\ (ج) \text{ لا} = \frac{۵}{۳} \text{ مس ط} \\ (د) \text{ لا} = ۲ \text{ قط ط} \end{array} \right.$$

میں مٹ لا کی قیمت معلوم کرو جبکہ ط = ۶۰ اور مٹ = ۱۵ اور ۳۰ =

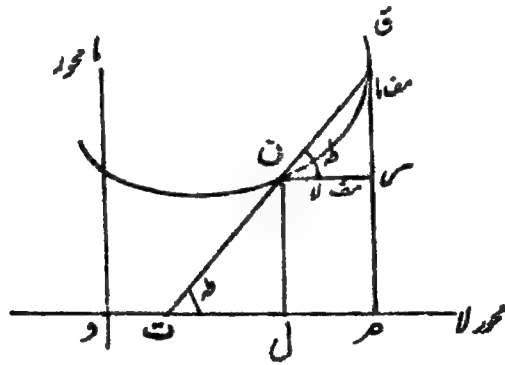
۳، ۳:- نسبت فرق - پچھلی دند میں مٹ ما اور مٹ لا

یعنی تابع متغیر اور متبوع متغیر میں محدود فرقوں کی قیمتیں حاصل کی گئی ہیں۔

اب ان فرقوں کی نسبت پر غور کرو یعنی مٹ ما اور الفاظ میں  $\frac{\text{تابع متغیر کا فرق}}{\text{متبوع متغیر کا فرق}}$  کی قیمت حاصل کرو۔ اس نسبت مٹ ما کا ہندسی اور طبعی منہدم ذیل سے ظاہر ہوگا۔

فرض کرو کہ ما = ف (لا) کی ترسیم کھینچی گئی ہے اور اس پر (لا، ما) کوئی

نقطہ ن ہے۔ نیز نقطہ (لا + مٹ لا، ما + مٹ ما) ق ہے۔ نقاطن اور ق سے



لا محور پر عمود ن ل اور ق ہر گراؤ۔ نیز ن سے ق مر پر عمود ن س کھینچو۔ تب ظاہر ہے کہ مٹ لا = مٹ ما = ن س اور ق س = مٹ ما



اور مس [ق ن س] = مس ان ت ل

$$= \text{مس ط} = \frac{\text{مف با}}{\text{مف لا}}$$

یعنی الفاظ میں قاطع ق ن محور لا کے ساتھ جزاویہ طہ بناتا ہے اس کا  
ماس =  $\frac{\text{مف با}}{\text{مف لا}}$

$$\text{پس مس ط} = \frac{\text{مف با}}{\text{مف لا}}$$

اسی طرح فرض کرو کہ ایک ذرہ خطِ مستقیم میں حرکت کر رہا ہے اور طے شدہ فاصلہ  
اور وقت میں رشتہ ہے۔

مس (فٹ) = ۲۰ ت + ۱۶ ت ا جہاں وقت ت کو ثانیوں میں شمار کیا گیا ہے  
اس میں ت کی کوئی قیمت چار ثانیہ درج کریں تو س = ۲۵۶ + ۸۰ = ۳۳۶ فٹ  
یعنی چار ثانیوں میں طے شدہ فاصلہ ۳۳۶ فٹ ہے اور اس دوران میں اوسط رفتار  
=  $\frac{س}{ت} = \frac{۳۳۶}{۲} = ۱۶۸$  فٹ فی ثانیہ ہے۔ اب اگر ت میں ۲ ثانیوں کا  
اضافہ کیا جائے تو مف ت = ۲ اور مف س = ۳۳۶ + ۵۷۶ + ۱۲۰ = ۸۴۰ فٹ

یعنی پانچویں اور چھٹے ثانیوں کی اوسط رفتار =  $\frac{\text{مف س}}{\text{مف ت}} = \frac{۸۴۰}{۴} = ۲۱۰$  فٹ فی ثانیہ۔  
لیکن اگر ذرہ کی رفتار بدل رہی ہو تو اوسط رفتار سے کچھ زیادہ فائدہ نہیں ہے۔  
اور یہ بہتر ہوگا کہ مف ت کے وقفہ کو حتی الامکان کم کیا جائے۔ اور بجائے  
اوسط رفتار کے کسی آن پر رفتار نکالنے کی کوشش کی جائے۔

اسی طرح اگر مذکورہ بالا ہندسی مثال میں نقطہ ق کو نقطہ ن کے  
قریب لایا جائے تو قاطع ماس کے قریب ہوتا جاتا ہے اور اگر اتہا میں  
ق کو ن پر منطبق کر دیا جائے تو قاطع ماس ہو جاتا ہے۔

بعض سوالوں میں بالخصوص اعداد و شمار میں مف با اور مف لا کافی بڑی  
متداریں ہوتی ہیں اور  $\frac{\text{مف با}}{\text{مف لا}}$  کی نسبت بے محدود فرقوں کے اصحاب کی بنیاد

تایم ہوئی۔ لیکن جیسا کہ اوپر کی ہندسی اور طبیعی مثالوں سے ظاہر ہے بالعموم  
مف لا انتہایت چھوٹی مقدار ہوگی اور لاداً مف مابھی بہت چھوٹی مقدار ہوگی۔

اس لیے  $\frac{\text{مف}}{\text{مف لا}}$  دو بہت چھوٹی مقداروں کی نسبت ہے اور انتہا میں اگر  
مف لا اور مف ما کو لا انتہاکم صغاریہ بنا دیا جائے تو  $\frac{\text{مف}}{\text{مف لا}}$  کی انتہا سے  
صغاری احصاء کی ابتداء ہوتی ہے۔ ہندسی مثال سے ظاہر ہے اگر نقطہ  
ق منحنی پر حرکت کرتے ہوئے نقطہ ن کے اس قدر قریب آجائے کہ انتہا میں  
نقطہ ن پر منطبق ہو جائے تو قاطع ماس میں تبدیل ہو جاتا ہے۔ الجبر کی  
زبان میں اس ہندسی واقعہ کو یوں بیان کرینگے کہ اگر مف لا  $\rightarrow$  قاطع  
ماس بن جاتا ہے اور طہ وہ زاویہ ہوتا ہے جو انتہا میں ماس ماحمور  
کے ساتھ بناتا ہے۔ پس مس طہ =  $\frac{\text{مف}}{\text{مف لا}}$  جب بھی یہ انتہا  
وجود رکھتی ہے۔ مس طہ کو منحنی کا ڈھال بھی کہتے ہیں۔ اس سوال کے  
حل کرنے کی کوشش میں لائیبنز کے ایک شہور فلسفی گوٹ فریدرک ولہلم لائیبنز  
(۱۶۴۶ء - ۱۷۱۶ء) کو اس بات کا احساس ہوا اور انہوں نے علم احصاء پر سائنس میں  
ایک مختصر مضمون رسالہ (Acta Eruditorum) میں شائع کیا۔ اس سے کچھ سال  
قبل طبیسی سوالوں میں شرح تبدیل اور رفتار پر غور کرتے ہوئے سر آڈیزک نیوٹن  
(۱۶۴۲ء - ۱۷۲۶ء) پر علم احصاء کا انکشاف بطور (Fluxion) کے شائع ہو گیا  
ہوا لیکن صاحب موصوف نے اس کو ۱۶۸۶ء تک شائع نہیں کیا۔ بعض ریاضی دانوں  
نے لائیبنز پر علمی چوری کا الزام لگایا لیکن موجودہ زمانہ میں تحقیق کنندوں کا خیال  
ہے کہ دونوں ریاضی دانوں نے بلا ایک دوسرے کے اثر کے علم احصاء کی مختلف  
نقطہ نظر سے بنیاد ڈالی۔ موجودہ زمانہ میں علم احصاء میں مروج علامتیں لائیبنز  
کی ہیں۔

### توضیحی مثالیں

مثال ۱:-  $1 = 2$  لا کے نقطہ  $2 = 2$  پر  $\frac{\text{مف}}{\text{مف لا}}$  کی قیمت دریافت کرو  
جبکہ  $\text{مف لا} = 1 \pm 1, 1 \pm \frac{1}{2}, 1 \pm \frac{1}{3}, 1 \pm \frac{1}{4}, \dots$





$$(ج) ۱ = \frac{۱}{۱-۱۲} \text{ جبکہ } ۱ = ۱$$

$$(د) ۱ = ۱ \text{ جب } ۱۲ \text{ جبکہ } ۱ = \frac{۱}{۱}$$

۳، ۴ :- تفرقی سر -  $\frac{\text{مف } ۱}{\text{مف } ۱}$  یعنی  $\frac{\text{ف (لا + مف لا) - ف (لا)}}{\text{مف لا}}$

کی انتہا جبکہ مف لا مثبت یا منفی جانب سے صفر کی طرف مائل ہو بالعموم مسلسل تفاعل کے لیے وجود رکھتی ہے۔ اگرچہ ایسی خاص مثالیں بنائی جاسکتی ہیں کہ مسلسل تفاعل کے کسی خاص نقطہ پر یا تمام نقطوں پر یہ انتہا وجود نہ رکھے۔

$$\frac{\text{نم } ۱}{\text{مف لا}} \text{ یا } \frac{\text{مف [ف (لا)]}}{\text{مف لا}} \text{ یا } \frac{\text{ف (لا + مف لا) - ف (لا)}}{\text{مف لا}}$$

یا تابع متغیر کا فرق کو  $\frac{\text{فر } ۱}{\text{فر لا}}$  یا  $\frac{\text{فر [ف (لا)]}}{\text{فر لا}}$  یا  $\frac{\text{ف (لا)}}{\text{فر لا}}$  سے تعبیر کیا جاتا ہے اور اس کو ما یا ف (لا) یا تابع متغیر کا لحاظ لا یعنی متبوع متغیر کے تفرقی سر یا مشتق تفاعل کہتے ہیں۔ انتہا سے پہلے  $\frac{\text{مف } ۱}{\text{مف لا}}$  ایک نسبت ہے اور مف لا اور مف لا علیحدہ علیحدہ وجود رکھتے ہیں لیکن انتہا کے بعد  $\frac{\text{فر } ۱}{\text{فر لا}}$  نسبت نہیں ہے بلکہ ایک معین مقدار ہے۔ آئندہ فرما او فر لا کی بھی تعریف بطور صفا یوں کے حصہ حصہ کے کی جائیگی لیکن فی الوقت فر لا اور فر لا کے کوئی معنی نہیں ہیں اس لیے  $\frac{\text{فر } ۱}{\text{فر لا}}$  کو ایک واحد چیز تصور کرنا چاہیے۔ یعنی  $\frac{\text{فر } ۱}{\text{فر لا}}$  تفاعل ما پر ایک عمل کا نتیجہ ہے اور یہ عمل  $\frac{\text{فر } ۱}{\text{فر لا}}$  سے تعبیر ہو سکتا ہے۔ اس بات پر زور دینے کے لیے  $\frac{\text{فر } ۱}{\text{فر لا}}$  کے تفاعل کو عفا یا عفا سے بھی تعبیر کرتے ہیں۔

پس تفرقی سر ہوگا عفا یا عفا یا عفا [ف (لا)]

توضیحی مثالیں

مثال (۱) -  $۱ = ۱$  کا تفرقی سر کسی نقطہ پر دریافت کرو۔

$$\text{مف}^1 \text{ا} = \text{م}^1 (\text{لا} + \text{مف}^1 \text{لا}) - \text{م}^2 \text{لا}^1 = \text{م}^1 \text{لا}^1 \text{مف}^1 \text{لا} + \text{م}^2 (\text{مف}^1 \text{لا})$$

## مشقی سوالات ۱۰

ذیل کے تفاعلوں کو تفرق کرو :

$$\text{لا} = ۱ (۳) \quad \text{لا}^۲ = ۱ (۲) \quad \text{لا}^۳ = ۱ (۱)$$

$$\text{لا}^۲ - ۳ = ۱ (۶) \quad ۵ - \text{لا}^۲ - \text{لا} = ۱ (۵) \quad ۳ + \text{لا}^۲ + \text{لا} = ۱ (۴)$$

$$\frac{۳}{۲\text{لا}} - ۲ = ۱ (۹) \quad \frac{۱}{\text{لا}} = ۱ (۸) \quad \text{لا}^۳ - ۱ = ۱ (۷)$$

$$\frac{۳ + \text{لا}^۲}{۳ - \text{لا}^۳} = ۱ (۱۰) \quad \text{جب} ۲ \text{ ط} = \text{لا} (۱۱) \quad \text{جم} ۳ \text{ ط} = \text{لا} (۱۲)$$

$$\text{مس} \text{ ط} = \text{لا} (۱۳) \quad \text{قط} ۲ \text{ ط} = \text{لا} (۱۴)$$

$$\text{لا}^۲ + \text{ب} + \text{لا} + \text{ج} = ۱ (۱۵)$$

۳ و ۵ - تکمل :- مذکورہ بالا دفعہ میں تفرق کرنا بتایا گیا ہے یعنی

کوئی تفاعل دیا گیا ہے اور طالب علم نے اس کا تفرق سر دریافت کیا ہے بعض سوالوں میں تفرق سر کی قیمت دی ہوئی ہوتی ہے اور اس سے اصل تفاعل کی قیمت دریافت کرنی پڑتی ہے یعنی اگر  $\frac{\text{لا}}{\text{لا}}$  [ف (لا)] کی قیمت معلوم ہو تو ف (لا) کی قیمت کیا ہوگی۔ مثلاً  $\frac{\text{لا}}{\text{لا}}$  کا تفرق سر لا ہے اور برعکس اس کے لا تفرق سر ہو تو تفاعل  $\frac{\text{لا}}{\text{لا}}$  ہوگا۔ تفرق کے اس مقبوعہ عمل کو تکمل کا عمل کہتے ہیں۔ پس ف (لا) کا تفرق سر  $\frac{\text{لا}}{\text{لا}}$  [ف (لا)] یا ف (لا) ہوگا اور ف (لا) تکملہ بجا ط لا کے تفاعل ف (لا) ہوگا۔ علامتوں میں اس بات کو یوں ظاہر کرتے ہیں کہ ف (لا) ف (لا) یعنی ف (لا) کا تکملہ بجا ط لا کے ف (لا) ہے

$$\text{ف (لا) ف (لا) = ف (لا)}$$

اعلیٰ ریاضی میں تکملہ کی تعریف ریمان لیپگ وغیرہ کے مطابق ایک لامتناہی سلسلہ کے مجموعہ سے کی جاتی ہے لیکن طالب علم کی موجودہ مشق کے لیے مناسب ہے کہ تکمل کی تعریف محض تفرق کے مقبوعہ عمل کی طرح کی جائے تفرق کی مثالوں میں بتایا گیا ہے کہ ایک مستقل کا تفرق سر صفر ہے

یعنی ف (لا) + مستقل کا تفریق سرف (لا) ہے

$$\frac{\text{فر}}{\text{لا}} [ \text{ف (لا) + مستقل } ] = \text{ف (لا)}$$

اس لیے مقلوب عمل کرنے سے حاصل ہوگا [ف (لا) فر] = ف (لا) + ہر جہاں ہر کوئی مستقل ہے۔ اس سے ظاہر ہے کہ تفریق کے عمل سے واقعی نتیجہ ملتا ہے لیکن مکمل کے عمل کے بعد حاصل مکمل میں ایک اختیاری مستقل موجود ہے اور اکثر سوالوں میں اس مستقل کی قیمت ابتدائی شرائط سے دریافت کی جاتی ہے اس مستقل کی موجودگی کی وجہ سے اس مکمل کو غیر معین مکمل بھی کہتے ہیں۔

## توضیحی مثالیں

مثال (۱) لا فر لا کی قیمت دریافت کرو ہمیں معلوم ہے کہ لا کا تفریق سر ۲ لا ہے اس لیے  $\frac{\text{لا}}{۲}$  کا تفریق سر لا ہوگا۔

$$\text{پس } [ \text{لا فر لا} ] = \frac{\text{لا}}{۲} + \text{ہر}$$

مثال (۲) [جم ۲ لا] کی قیمت دریافت کرو۔ ہمیں گزشتہ وضوح کی مثالوں سے معلوم ہے کہ جب لا کا تفریق سر بلحاظ لا کے جم ۲ لا ہے

$$\text{اس لیے } [ \text{جم ۲ لا فر لا} ] = \frac{\text{جم ۲ لا}}{۲} + \text{ہر}$$

## مشقی سوالات ۱۱

ذیل کی قیمت دریافت کرو:

$$(۱) [ \text{لا فر لا} ] \quad (۲) [ \text{جم ۲ لا فر لا} ] \quad (۳) [ \text{جم ۲ لا فر لا} ]$$

$$(۴) [ \text{جم ۲ لا فر لا} ] \quad (۵) [ \text{جم ۲ لا فر لا} ] \quad (۶) [ \text{جم ۲ لا فر لا} ]$$





اب ہم تین ذیلی ضابطے بیان کرتے ہیں جن کا ثبوت بہت آسان ہے اور طالب علم کے لیے بطور مشق کے چھوڑ دیتے ہیں۔

$$\frac{فر}{فر} = ۱ \text{ (مستقل)}$$

$$\text{اور } \frac{فر}{فر} [مر] = [مر] \frac{فر}{فر} = مر$$

$$\text{اور } \frac{فر}{فر} [فر + فر + ...] = [فر + فر + ...] \frac{فر}{فر} = فر + فر + ...$$

یہ ضابطے سوالات میں بہت استعمال ہونگے۔

$$\text{اسی طرح } \frac{فر}{فر} (۱ + ن) = (۱ + ن) \frac{فر}{فر} \text{ یعنی } \frac{فر}{فر} = ۱$$

$$\text{اور مقلوب عمل سے } \frac{۱ + ن}{۱ + ن} = ۱ \text{ مستقل}$$

اگر  $۱ = ۱$  تو یہ ضابطہ درست نہیں رہتا کیونکہ  $\frac{فر}{فر}$  کے کوئی معنی نہیں ہیں۔  $\frac{فر}{فر}$  کی قیمت بعد میں نکالی جائیگی۔

نیز ذیلی ضابطوں کے مقلوب عمل سے حاصل ہوگا  $مر [فر] = مر فر$

$$\text{اور } [فر + فر + ...] فر = فر [فر + فر + ...]$$

## مشقی سوالات ۱۲

ذیل کے تناظروں کو تفریق کرو۔ ضابطوں کا استعمال کیا جائے۔

$$(۱) ۷۲ + ۳ \quad (۲) ۷۲ + ۵۳ - ۵ \quad (۳) ۵۳ - ۷۵ + ۷۵$$

$$(۴) ۷۵ + ۷۵ - ۷۵ \quad (۵) ۷۵ - ۷۵ \quad (۶) ۷۵ + ۷۵ - ۷۵ + ۷۵$$

$$(۷) ۷۲ + ۷۲ \quad (۸) ۷۲ + ۷۲ \quad (۹) ۷۲ + ۷۲$$

$$(۱۰) \frac{۳}{۴} \text{ لا} \quad (۱۱) ۶ + \frac{۱}{۲} ۵ \quad (۱۲) \frac{۱ + \text{بت} + \text{ج} + \text{ت}}{\text{ت}}$$

$$(۱۳) \frac{۲}{۳} ۱۲ + ۶ + \frac{۲}{۳} ۱۲ \quad (۱۴) \frac{۱ + \text{بت} + \text{ج} + \text{ت}}{۳}$$

ذیل کے تفاعلوں کے تکملے ضابطے کی مدد سے لکھو:۔

$$(۱۵) \int ۵ \text{ لا} \text{ فلا} \quad (۱۶) \int (۷۳ + ۵ \text{ لا} - ۷) \text{ فلا} \quad (۱۷) \int (\frac{۱}{۴} \text{ لا} - ۲) \text{ فلا}$$

$$(۱۸) \int (۲ + \text{ص})^۲ \text{ فرض} \quad (۱۹) \int (۲ + \frac{۳}{۴} \text{ ی}) \text{ فزی}$$

$$(۲۰) \int (۱ + \text{لا} + \text{ب})^۲ \text{ فلا} \quad (۲۱) \int ۲۵ \text{ لا}^۲ \text{ فلا}$$

$$(۲۲) \int (۴ \text{ لا} + ۵ \text{ لا} + \frac{۲}{۳}) \text{ فلا} \quad (۲۳) \int ۳ \text{ لا}^۲ \text{ فزت}$$

$$(۲۴) \int \frac{۱ + \text{بت} + \text{ج} + \text{ت}}{\text{ت}} \text{ فزت} \quad (۲۵) \int (۴ \text{ لا} - ۳ + \frac{۲}{۳}) \text{ فزی}$$

$$(۲۶) \int \frac{۵ \text{ لا} + ۳ \text{ و}}{۴} \text{ فزی}$$

۳۴۶۲: تفاعل کا تفاعل :- فرض کرو کہ ما = فہ (و) جہاں

و = ف (لا) اور ما کا تفرقی سر بلحاظ لا کے مطلوب ہے۔ ایک طریقہ تو یہ ہوگا کہ و کی قیمت ف (لا) کو فہ (و) میں درج کر دیا جائے۔ اس طرح ما با راست لا کا تفاعل ہو جاتا ہے اور اس کو تفرق کرتے سے  $\frac{۱}{۴}$  حاصل ہو جائیگا۔ لیکن اکثر سوالات میں یہ عمل مشکل ہوگا اور اس لیے ما کا تفرقی سر بلحاظ لا کے بتوسط و دریافت کیا جائیگا۔

$$\text{ما} + \text{مف} = \text{فہ} (و + \text{مف} و) \quad \text{اور} \quad \text{و} + \text{مف} = \text{ف} (لا + \text{مف} لا)$$

$$\text{اب} \frac{\text{مف} لا}{\text{مف} لا} = \frac{\text{فہ} (و + \text{مف} و) - \text{فہ} (و)}{\text{مف} و} = \frac{\text{فہ} (و + \text{مف} و) - \text{فہ} (و)}{\text{مف} و} \times \frac{\text{مف} و}{\text{مف} لا}$$

$$= \frac{\text{فہ} (و + \text{مف} و) - \text{فہ} (و)}{\text{مف} و} \times \frac{\text{فہ} (لا + \text{مف} لا) - \text{فہ} (لا)}{\text{مف} لا}$$

انتہا کے بل میں ثابت کیا گیا ہے کہ حاصل ضرب کی انتہا اجزاء کی انتہاؤں کے



اس تکمیل میں بھی تکملہ ۲ لا (لا + ۵) کو لا کی قوتوں میں پھیلا یا جاسکتا ہے۔ اور پھر مضابطہ سے تکمیل کیا جاسکتا ہے۔ لیکن اس دفعہ کے استعمال سے عمل میں بہت سہولت ہوگی۔

$$\text{فرض کر دو کہ لا} = ۵ + \text{ص} \quad \text{اس لیے فرض} = \frac{\text{لا}}{\text{فلا}} = ۲$$

$$\begin{aligned} \text{لا} (۲ لا + ۵) \text{ فلا} &= \text{لا} \text{ ص} \frac{\text{فرض}}{\text{فلا}} = \text{لا} \text{ ص} \frac{\text{لا}}{\text{فلا}} = \text{لا} \text{ ص} \frac{\text{لا}}{\text{فلا}} = \text{لا} \text{ ص} \frac{\text{لا}}{\text{فلا}} \\ &= \frac{۱}{۵} (۲ لا + ۵) + \text{مستقل} \end{aligned}$$

## مشقی سوالات ۱۳

ذیل کے تناظروں کے تفریقی سرور یافت کر دو۔

$$\begin{aligned} (۱) \quad (۲ لا + ۱) \quad (۲) \quad (۲ لا + ۵) \quad (۳) \quad (۲ لا + ۵ - ۳ لا) \quad (۴) \quad (۲ لا + ۵ - ۳ لا) \\ (۵) \quad (۲ لا + ۵ - ۳ لا) \quad (۶) \quad (۲ لا + ۵ - ۳ لا) \quad (۷) \quad (۲ لا + ۵ - ۳ لا) \\ (۸) \quad (۲ لا + ۵ - ۳ لا) \quad (۹) \quad (۲ لا + ۵ - ۳ لا) \quad (۱۰) \quad (۲ لا + ۵ - ۳ لا) \end{aligned}$$

$$(۱۱) \quad ۱ = ۳ ص + ۲ ص - \frac{۱}{ص} \quad \text{اور} \quad \frac{۱}{ص} = ۲ - \frac{۱}{ص}$$

$$(۱۲) \quad \sqrt{۲ لا - ۱} \quad (۱۳) \quad \sqrt{۲ لا + ۵} \quad (۱۴) \quad \sqrt{۲ لا + ۵}$$

$$(۱۵) \quad \sqrt{۲ لا + ۵} \quad (۱۶) \quad \sqrt{۲ لا + ۵}$$

ذیل کے مکملوں کی قیمت دریافت کر دو۔

$$(۱۷) \quad \sqrt{۲ لا + ۵} \quad (۱۸) \quad \sqrt{۲ لا + ۵} \quad (۱۹) \quad \sqrt{۲ لا + ۵}$$

$$(۳۰) \int \frac{فرلا}{۳(۱+لا۵)} (۲۱) \int [ \frac{۲}{۳(۱+لا)} - ۳ + لا۲ ] فرلا$$

$$(۲۲) \int [ \frac{۲}{لا} + \frac{۲}{۳(۱-لا۳)} + ۱ + لا۷ - لا۸ ] فرلا$$

$$(۲۳) \int (۲ لا۳ - لا۷ + لا۷) (۲ لا۳ - لا۷) فرلا$$

$$(۲۴) \int (۲ لا۳ - لا۷) (۲ لا۳ - لا۷) فرلا$$

$$(۲۵) \int (۲ لا۳ - لا۷) فرلا (۲۶) \int (۲ لا۳ - لا۷) فرلا$$

$$(۲۷) \int (۲ لا۳ - لا۷) فرلا (۲۸) \int (۲ لا۳ - لا۷) فرلا$$

۳۳ و ۳۴ - مثلثی تفاعلوں کا تفرقی سر :-

(۱) جب لا کا تفرقی سر :-

فرض کرو کہ ما = جب لا

تو مفا = جب (لا + مفا) - جب لا

$$= ۲ جم \frac{۲ لا + مفا}{۲} جب مفا$$

$$= \frac{مفا}{مفا} = \frac{جم (لا + مفا)}{مفا} جب مفا$$

$$اور \frac{فرلا}{فرلا} = \frac{مفا}{مفا} = \frac{جم (لا + مفا)}{مفا} جب مفا$$

$$= \frac{مفا}{مفا} = \frac{جم (لا + مفا)}{مفا} جب مفا$$

$$= جم لا$$

مقلوب عمل سے  $\int جم لا فرلا = جب لا + مستقل$

(ب) جم لا کا تفرقی سر:-

$$۱ = \text{جم لا} \quad \text{تو مف ما} = \text{جم} (\text{لا} + \text{مف لا}) - \text{جم لا}$$

$$= ۲ \text{ جب} (\text{لا} + \frac{\text{مف لا}}{۲}) \text{ جب} (\frac{\text{مف لا}}{۲}) - \text{جم لا}$$

$$= ۲ - \text{جم} (\text{لا} + \frac{\text{مف لا}}{۲}) \text{ جب} \frac{\text{مف لا}}{۲}$$

$$\therefore \frac{\text{فر لا}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{نہا}}{\text{مف لا}} = \frac{\text{نہا}}{\text{مف لا}} \left[ \frac{\text{جم} (\text{لا} + \frac{\text{مف لا}}{۲}) \text{ جب} \frac{\text{مف لا}}{۲}}{\frac{\text{مف لا}}{۲}} \right] - \text{جم لا}$$

$$= - \text{جم لا}$$

اور مقلوب عمل سے  $\text{جم لا فر لا} = - \text{جم لا} + \text{مستقل}$ 

(ج) مس لا کا تفرقی سر:-

فرض کرو ما = مس لا

$$\text{تو مف ما} = \text{مس} (\text{لا} + \text{مف لا}) - \text{مس لا}$$

$$= \frac{\text{جب} (\text{لا} + \text{مف لا})}{\text{جم} (\text{لا} + \text{مف لا})} - \frac{\text{جب لا}}{\text{جم لا}}$$

$$= \frac{\text{جب} (\text{لا} + \text{مف لا}) \text{ جم لا} - \text{جم} (\text{لا} + \text{مف لا}) \text{ جب لا}}{\text{جم لا} \text{ جم} (\text{لا} + \text{مف لا})}$$

$$\therefore \frac{\text{فر لا}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{نہا}}{\text{مف لا}} = \frac{\text{نہا}}{\text{مف لا}} \times \frac{\text{جب لا}}{\text{جم لا}} \times \frac{1}{\text{جم} (\text{لا} + \text{مف لا})}$$

$$= \frac{1}{\text{جم لا} \times \text{جم لا}} = \frac{1}{\text{قط لا}}$$

مقلوب عمل سے  $\text{قط لا فر لا} = \text{مس لا} + \text{مستقل}$ 

(د) جم لا کا تفرقی سر:-

فرض کرو کہ ما = مم لا

$$\begin{aligned}
 & \text{تو مفت م} = \text{مم} (\text{لا} + \text{مفت لا}) - \text{مم لا} \\
 & = \frac{\text{جم} (\text{لا} + \text{مفت لا}) \text{جب لا} - \text{جم لا} \text{جب} (\text{لا} + \text{مفت لا})}{\text{جب} (\text{لا} + \text{مفت لا}) \text{جب لا}} \\
 & = \frac{\text{جب} (-\text{مفت لا})}{\text{جب لا} \text{جب} (\text{لا} + \text{مفت لا})} = \frac{-\text{جب مفت لا}}{\text{جب لا} \text{جب} (\text{لا} + \text{مفت لا})} \\
 & \therefore \frac{\text{فر لا}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{نہا}}{\text{مفت لا}} = \frac{\text{نہا}}{\text{مفت لا}} = \frac{\text{نہا}}{\text{مفت لا}} \times \frac{\text{جب لا}}{\text{جب لا}} \times \frac{1}{\text{جب} (\text{لا} + \text{مفت لا})} \\
 & = \frac{1}{\text{مفت لا}} = \frac{1}{\text{مفت لا}} = \frac{1}{\text{مفت لا}} \\
 & \text{مقلوب عمل سے } \text{فر لا} \text{ فر لا} = \text{جب لا} + \text{مفت لا} \\
 & (\text{ھ}) \text{ قسط لا کا تفریق سر :-} \\
 & \text{قسط لا} = \text{م}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{تو مفت م} = \text{قسط} (\text{لا} + \text{مفت لا}) - \text{قسط لا} \\
 & = \frac{\text{جم لا} - \text{جم} (\text{لا} + \text{مفت لا})}{\text{جم لا} \text{جم} (\text{لا} + \text{مفت لا})} = \frac{\text{جم لا} - \text{جم} (\text{لا} + \text{مفت لا})}{\text{جم لا} \text{جم} (\text{لا} + \text{مفت لا})} \\
 & \therefore \frac{\text{فر لا}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{نہا}}{\text{مفت لا}} = \frac{\text{نہا}}{\text{مفت لا}} = \frac{\text{نہا}}{\text{مفت لا}} \times \frac{\text{جب لا}}{\text{جب لا}} \times \frac{1}{\text{جم لا} \text{جم} (\text{لا} + \text{مفت لا})} \\
 & = \frac{\text{جب لا}}{\text{جم لا} \text{جم} (\text{لا} + \text{مفت لا})} = \frac{\text{جب لا}}{\text{جم لا} \text{جم} (\text{لا} + \text{مفت لا})} \\
 & \text{اور مقلوب عمل سے } \text{فر لا} \text{ قسط لا} = \text{قسط لا} + \text{مفت لا} \\
 & (\text{و}) \text{ قم لا کا تفریق سر :-}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{م} = \text{قم لا} \\
 & \text{تو مفت م} = \text{قم} (\text{لا} + \text{مفت لا}) - \text{قم لا} \\
 & = \frac{\text{جم لا} - \text{جم} (\text{لا} + \text{مفت لا})}{\text{جم لا} \text{جم} (\text{لا} + \text{مفت لا})} = \frac{\text{جم لا} - \text{جم} (\text{لا} + \text{مفت لا})}{\text{جم لا} \text{جم} (\text{لا} + \text{مفت لا})}
 \end{aligned}$$





$$\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} \text{ جب } (2+13) \text{ متقل}$$

## مشقی سوالات ۱۴

ذیل کے تفاعلوں کو تفریق کرو :-

$$(1) \text{ جم } (2+3) \text{ جب } (2) \text{ جب } (3) \\ (3) \text{ جب } (2-3) + \text{ مس } (2)$$

$$(4) \text{ جب } (2+3) \text{ جب } (2-3) \text{ جم } (2) \text{ قم } (2) \text{ قط } (2-3) \\ (5) \text{ جب } (2-3) \text{ مس } (2+3) \text{ مم } (2+3) \text{ قم } (2+3) \text{ قط } (2+3) \\ (10) \text{ قط } (2-3) + \text{ قم } (2) \text{ قط } (2+3)$$

ذیل کے تفاعلوں کی قیمت دریافت کرو :-

$$(11) \text{ جب } (2+3) \text{ فلا } (12) \text{ جم } (2-3) \text{ فلا } (13) \text{ قط } (2-3) \text{ فلا } (14) \\ (15) \text{ جب } (2-3) \text{ قط } (2+3) \text{ مم } (2+3) \text{ قم } (2+3) \text{ قط } (2+3) \\ (16) \text{ جب } (2+3) \text{ جم } (2-3) \text{ قط } (2+3) \text{ قم } (2+3) \text{ قط } (2+3)$$

۳۶۴ :- تفاعلوں کے حاصل ضرب اور حاصل تقسیم کو تفریق کرنا :-

(1) دو تفاعلوں کے حاصل ضرب کا تفریق سر :-  
فرض کرو کہ  $x = 1$  و جہاں  $x$  اور  $y$  متغیر لا کے تفاعل ہیں۔  
اگر  $x$  میں  $y$  کا اضافہ کیا جائے تو  $x$  اور  $y$  کے اضافوں میں ذیل کا  
رشتہ ہوگا۔

$$\text{مف} \text{ا} = (\text{مف} \text{ر}) + (\text{مف} \text{و}) - \text{مف} \text{و} = \text{مف} \text{و} + \text{مف} \text{و} + \text{مف} \text{و} \times \text{مف} \text{و}$$

$$\text{اس لیے } \frac{\text{فر} \text{ا}}{\text{فر} \text{ا}} = \frac{\text{مف} \text{ا}}{\text{مف} \text{ا}} = \frac{\text{مف} \text{ا}}{\text{مف} \text{ا}} = \left[ \frac{\text{مف} \text{و}}{\text{مف} \text{ا}} + \frac{\text{مف} \text{و}}{\text{مف} \text{ا}} + \frac{\text{مف} \text{و} \times \text{مف} \text{و}}{\text{مف} \text{ا}} \right]$$

$$\text{مف} \text{و} + \frac{\text{فر} \text{و}}{\text{فر} \text{ا}} =$$

$$\text{مف} \text{و} + \frac{\text{فر} \text{و}}{\text{فر} \text{ا}} = \frac{\text{فر} \text{ا}}{\text{فر} \text{ا}} = \frac{1}{\text{فر} \text{ا}}$$

اسی طرح اگر 'م'، 'و'، 'ر' کی متغیر لا کے تفاعل ہوں تو

$$\frac{\text{فر} \text{و}}{\text{فر} \text{ا}} + \dots + \frac{\text{فر} \text{و}}{\text{فر} \text{ا}} + \frac{\text{فر} \text{و}}{\text{فر} \text{ا}} = \frac{1}{\text{فر} \text{ا}} (\text{م} \times \text{و} \times \text{ر})$$

الفاظ میں اس کو یوں بیان کر سکتے ہیں کہ حاصل ضرب کا تفرقی سر مساوی ہے تفاعل ضرب ایسا مجموعہ جس کی رقمیں ہر جزو کے تفرقی سر کو اس جزو پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتی ہیں۔

$$\text{اگر اس میں ہر جزو کو لا کے مساوی رکھا جائے تو } \frac{1}{\text{لا} \text{ا}} = \frac{\text{فر} \text{ا}}{\text{لا} \text{ا}}$$

یعنی  $\frac{\text{فر} \text{ا}}{\text{لا} \text{ا}} = \text{ن لا} \text{ا}$  - جب ن مثبت صحیح عدد ہے اور یہ لا کے تفرقی سر حاصل کرنے کے ضابطہ کا دوسرا ثبوت ہے۔

(ب) دو تفاعلوں کے حاصل تقسیم کا تفرقی سر :-

فرض کرو کہ  $\text{م} = \frac{\text{و}}{\text{ر}}$  جہاں و اور ر متغیر لا کے تفاعل ہیں۔

$$\text{اس لیے مف} \text{ا} = \frac{\text{م} + \text{م} \text{و}}{\text{و} + \text{م} \text{و}} = \frac{\text{و}}{\text{و}} = \frac{\text{و} - \text{م} \text{و}}{\text{و} + \text{م} \text{و}}$$

$$\therefore \frac{\text{فر} \text{ا}}{\text{فر} \text{ا}} = \frac{\text{مف} \text{ا}}{\text{مف} \text{ا}} = \frac{\text{مف} \text{ا}}{\text{مف} \text{ا}} = \frac{\text{مف} \text{و} - \frac{\text{مف} \text{و}}{\text{ر}}}{\text{و} + \text{م} \text{و}}$$

$$\frac{\frac{فرو}{فولا} - \frac{فرو}{فولا}}{و} =$$

الفاظ میں یہ ضابطہ اس طرح بیان ہو سکتا ہے کہ کسی کسر کے تفریق سر کا نسب نما ابتدائی کسر کے نسب نما کا مربع ہوگا اور شمار کنندہ نسب نما ضرب شمار کنندہ کا تفریق سر منفی شمار کنندہ ضرب نسب نما کا تفریق سر ہوگا۔  
اس ضابطہ کو حاصل ضرب کے ضابطے کی مدد سے بھی نکالا جاسکتا ہے۔

$$و \times و = \frac{1}{و} \times و = 1$$

$$\left[ \frac{\frac{فرو}{فولا}}{و} + \frac{\frac{فرو}{فولا}}{و} \right] و \times و = \frac{فرو}{فولا} \quad \therefore$$

$$\left[ \frac{\frac{فرو}{فولا} \times و \times (و)}{و} + \frac{\frac{فرو}{فولا}}{و} \right] و =$$

$$\left[ \frac{\frac{فرو}{فولا}}{و} - \frac{\frac{فرو}{فولا}}{و} \right] و =$$

$$\frac{\frac{فرو}{فولا} - \frac{فرو}{فولا}}{و} =$$

ضابطہ  $\frac{فرو}{فولا} = \frac{فرو}{فولا} + و \times \frac{فرو}{فولا}$  پر متغلب عمل کرنے سے حاصل ہوتا ہے کہ

$و = و + و$  اس سے تکمل بالخصص کا ضابطہ اخذ ہوتا ہے جس کی تکمل میں بہت اہمیت ہے اور اسے تکمل کے باب میں وضاحت سے بتایا جائیگا۔

توضیحی مثالیں

مثال (۱) — اگر  $ما = لا$  جب لا تو  $\frac{فرو}{فولا}$  دیافت کرو۔

$$\frac{\text{فرا}}{\text{فرا}} = \frac{\text{فرا}(\text{لا}^2)}{\text{فرا}} \times \text{جب لا} + \text{لا} \frac{\text{فرا}}{\text{فرا}} = \frac{\text{فرا}}{\text{فرا}}$$

$$= \text{لا} \text{جب لا} + \text{لا} \text{جم لا}$$

$$\text{مثال (۲)} - \frac{\text{لا}^2 + ۳}{(\text{لا} + ۱)} = ۱ \text{ کو تفریق کرو۔}$$

$$\frac{\text{فرا}(\text{لا} + ۱) - (\text{لا}^2 + ۳)}{(\text{لا} + ۱)} = ۱ \text{ عرف}$$

$$\frac{\text{لا}^۲ - \text{لا} - ۲}{(\text{لا} + ۱)} = \frac{(\text{لا} + ۱)\text{لا} - (\text{لا}^۲ + ۳)}{(\text{لا} + ۱)}$$

## مشقی سوالات ۱۵

ذیل کو تفریق کرو:۔

$$(۱) \frac{\text{لا}^۲(\text{لا} + ۱)}{۳ + \text{لا} ۹} (۲) \frac{\text{لا}^۳(\text{لا} + ۲)}{۳ + \text{لا} ۹} (۳) \frac{\text{لا}^۲(\text{لا} + ۱)}{۳ + \text{لا} ۹}$$

$$(۴) \frac{\text{لا}^۲ - \text{لا} ۲}{۱ + \text{لا} ۲} \times \text{جم لا} (۵) \frac{\text{جب لا} + ۱}{۳ + \text{لا} ۲} (۶) \text{جب طه مس} (۷) \text{جب طه مس}$$

$$(۸) \frac{\text{لا}(\text{لا} + ۱)}{\text{ج لا} + ۵} (۹) \text{جب (طه + عه) جم (طه + عه)} (۱۰) \frac{\text{لا}^۲(۱ - \text{لا} ۲)}{۳(۲ + \text{لا} ۳)}$$

$$(۱۱) \frac{\text{لا}^۲ + ۵}{۵ - \text{لا} ۸} (۱۲) \frac{\text{لا}^۲(۲ - \text{لا} ۳)}{۳(۲ + \text{لا} ۳)}$$

$$(۱۳) \frac{\text{قلم فہم} (۲ - \text{فہ} ۱) \text{قط} (۳ - \text{فہ} ۲)}{۲ + \text{فہ}} (۱۴) \frac{\text{قط} (طه ۲) \text{مس} ۳}{\text{جب (طه ۳ + عه ۵)}}$$

۳۶۵:۔ تضمینی (Implicit) تفاعل کو تفریق کرنا۔

تفاعل کی تعریف میں بتلایا گیا ہے کہ دو متغیروں میں کسی رشتہ کو تفاعل کہتے ہیں۔ اور ان میں سے کسی ایک متغیر کو مستبوع متغیر اور دوسرے کو تابع متغیر فرض کرو کہ ف (لا، ما) = کوئی تفاعل ہے۔ اس میں لا یا ما کو مستبوع متغیر فرض کر سکتے ہیں۔ لیکن بالعموم اگر ان میں سے کوئی ایک متغیر دوسرے متغیر کی رقوم میں تصریحی طور پر بیان ہو سکتا ہے تو اول الذکر کو تابع متغیر اور موخر الذکر کو مستبوع متغیر کہتے ہیں۔

بعض دفعہ دونوں ایک دوسرے کی رقوم میں صریح طور پر بیان ہو سکتے اور بعض دفعہ کوئی بھی نہیں۔ صریح طور پر بیان ہونے والی صورت میں تفرق سر  $\frac{ف}{لا}$  یا  $\frac{ف}{ما}$  ہوگا لیکن ان دونوں مشتقوں میں بہت سادہ رشتہ ہے اہد اس سے بہت سارے سوالات میں بے حد سہولت ہوتی ہے۔

$$\frac{ف}{لا} = \frac{ف}{ما} = \frac{ف}{لا} = \frac{ف}{ما}$$

اب اگر  $\frac{ف}{لا}$  ہے۔ تو لازماً  $\frac{ف}{ما}$  ہے۔

$$\frac{ف}{لا} = \frac{ف}{ما} = \frac{ف}{لا} = \frac{ف}{ما}$$

$$\frac{ف}{لا} = \frac{ف}{ما} \times \frac{ف}{لا} = 1$$

لیکن اگر ف (لا، ما) = کو صریح طور پر کسی متغیر کی رقوم میں نہیں بیان کیا جاسکتا ہے تو ف (لا، ما) کی ہر رقوم کو بلحاظ لا تفرق کر لو اور اس سے جو جملہ بنتا ہے اس کو صفر کے مساوی رکھو یعنی  $\frac{ف}{لا}$  [ف (لا، ما)] = اس کو حل کرنے سے  $\frac{ف}{لا}$  یا  $\frac{ف}{ما}$  کے لیے جملہ حاصل ہوگا اور اس میں بالعموم دونوں متغیر موجود ہوں گے۔

توضیحی مثالیں

مثال (۱) - اگر ما = ف لا تو  $\frac{ف}{لا}$  دریافت کرو۔

$$\therefore \text{لا} = \text{جب } \text{ما} \text{ اور } \frac{\text{فرما}}{\text{فرما}} = \text{جم } \text{ما}$$

$$\therefore \frac{1}{\frac{1}{\text{فرما}} - 1} \pm = \frac{1}{\text{جم } \text{ما}} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرما}}$$

مثال (۲)  $\text{لا}^۲ + \text{لا} \text{ما} + \text{ما}^۲ + \text{ج} = ۰$  سے  $\frac{\text{فرما}}{\text{فرما}}$  کی قیمت دریافت کرو۔

اس مساوات کو  $\text{لا} \text{ما}$  کے لیے حل کر سکتے ہیں اور پھر تفریق کر سکتے ہیں۔ لیکن حل میں جذر موجود ہوگا جس کی وجہ سے تفریق میں ذرا مشکل ہوگی۔ اس لیے جگہ کو راست تفریق کرنے سے حاصل ہوتا ہے:

$$\text{لا}^۲ + \text{لا} \text{ما} + \text{ما}^۲ + \text{ج} = ۰ \quad \text{فرما} \text{ ما}^۲ + \frac{\text{فرما}}{\text{فرما}} \text{لا} \text{ما} + \frac{\text{فرما}}{\text{فرما}} \text{ما}^۲ + \text{ج} = ۰$$

$$\therefore \text{لا}^۲ + \text{لا} \text{ما} + \text{ما}^۲ = -\frac{\text{فرما}}{\text{فرما}} (\text{لا} + \text{ما})$$

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرما}} = -\frac{\text{لا} + \text{ما}}{\text{لا} + \text{ما}}$$

## مشقی سوالات ۱۶

ذیل میں  $\frac{\text{فرما}}{\text{فرما}}$  کی قیمت معلوم کرو۔

$$(۱) \text{لا} + \text{لا}^۲ + \text{لا} \text{ما} + \text{ما}^۲ = ۱$$

$$(۲) \text{لا} = \text{ما}^۲ - \text{ما}^۳ + ۱ \quad (۳) \text{لا} = \text{قم} (۲ + \text{ما}^۲)$$

$$(۴) ۵ = \frac{\text{ما}^۳ + \text{ما}^۲}{۱ - \text{ما}^۲} \times \text{لا} \quad (۵) \text{مس} (\text{لا} + \text{ما}) = \text{لا}$$

$$(۶) \text{قط } \frac{\text{لا}}{\text{لا}} = \text{لا} \quad (۷) \text{لا} = ۱ + \sqrt{\text{لا}} + \text{لا}$$





ثبت ہوگا۔

(ب) حجم<sup>۱</sup> لا کو تفرق کرنا

ما = حجم<sup>۱</sup> لا کو واحد قیمتی تفاعل بنانے کے لیے بالعموم لا کی کسی قیمت کے جواب میں ماکہ وہ قیمت لی جاتی ہے جو صفر اور ۳ کے درمیان واقع ہو۔ پس جب ماکہ قیمت صفر سے ۳ تک بڑھتی ہے لا کی قیمت + ۱ سے گھٹ کر - ۱ ہو جاتی ہے یعنی  $\frac{فرلا}{۳}$  منفی مقدار ہوگی۔

اب لا = حجم ما اس لیے  $\frac{فرلا}{۳} = -$  جب ما

اور اگر ماکہ قیمت صفر اور ۳ کے درمیان ہو تو جب ما مثبت ہوگا۔

اس لیے  $\frac{فرلا}{۳} = -$  جب ما  $= - \left[ \frac{۱}{۱-۱۱} + \frac{۱}{۱-۱۱} \right] = - \frac{۱}{۱-۱۱}$

ضابطہ (۱) اور (ب) پر مقلوب عمل سے حاصل ہوتا ہے

ک  $\frac{فرلا}{۱-۱۱} =$  جب<sup>۱</sup> لا + مستقل

اور - ک  $\frac{فرلا}{۱-۱۱} =$  حجم<sup>۱</sup> لا + مستقل

جب<sup>۱</sup> لا اور حجم<sup>۱</sup> لا کے تفرقی سر کی علامتوں کا تعین ان کی صدر قیمتوں سے کیا گیا ہے۔ اگر صدر قیمتوں کی مختلف تعریف کی جائے تو علامت بھی بدل سکتی ہے۔ مثلاً اگر جب<sup>۱</sup> لا سے وہ زاویہ مراد ہو جو  $\frac{۳}{۴}$  اور  $\frac{۳}{۴}$  کے درمیان ہے تو جب<sup>۱</sup> لا کا تفرقی سر منفی ہوگا۔

نیز اگر حجم<sup>۱</sup> لا سے وہ زاویہ مراد ہو جو ۳ اور  $\frac{۳}{۲}$  کے درمیان ہے تو حجم<sup>۱</sup> لا کا تفرق مثبت ہوگا۔ اور ظاہر ہے کہ جب<sup>۱</sup> لا =  $\frac{۳}{۴}$  حجم<sup>۱</sup> لا

اس لیے  $\pm$  ک  $\frac{فرلا}{۱-۱۱}$  کی قیمت جب<sup>۱</sup> لا + مستقل یا حجم<sup>۱</sup> لا مستقل

لکھی جاسکتی ہے چونکہ  $\frac{۳}{۴}$  مستقل میں شریک ہے۔

### (ج) مس<sup>-۱</sup> لا کا تفرق :-

ا = مس<sup>-۱</sup> لا کو واحد قیمتی تفاعل بنانے کے لیے ا کی قیمت  $\frac{\pi}{2}$  اور  $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$  کے درمیان لی جاتی ہے۔ اور جیسے ا کی قیمت  $\frac{\pi}{2}$  سے  $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$  تک بڑھتی ہے لا کی قیمت  $-\infty$  سے  $+\infty$  تک بڑھتی ہے یعنی  $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$  مثبت ہوگا۔ اور چونکہ  $\pi$  اس کا دور ہے اس لیے  $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$  ہمیشہ مثبت رہیگا صدر قیمت کی خواہ کچھ بھی تعریف کی جائے۔

$$\text{لا} = \text{مس} \text{ ا} \quad \therefore \quad \frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} = \text{قط} \text{ ا}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{1}{\text{قط} \text{ ا}} = \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\text{لا}} + 1}}$$

### (د) مم<sup>-۱</sup> لا کا تفرق :-

ا = مم<sup>-۱</sup> لا کو واحد قیمتی تفاعل بنانے کے لیے ا کی قیمت  $\frac{\pi}{2}$  اور  $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$  کے درمیان لی جاتی ہے۔ اور جیسے ا کی قیمت  $\frac{\pi}{2}$  سے  $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$  تک بڑھ کر صفر ہونے پر  $\frac{\pi}{2}$  تک جاتی ہے ویسے لا کی قیمت صفر سے گھٹ کر  $-\infty$  ہوتی ہے اور پھر  $+\infty$  سے صفر تک گھٹتی ہے۔ یعنی  $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$  ہمیشہ منفی ہوگا۔

$$\text{لا} = \text{مم} \text{ ا} \quad \therefore \quad \frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} = - \text{تم} \text{ ا}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} = - \frac{1}{\text{تم} \text{ ا}} = - \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{\text{لا}} + 1}}$$

نتیجہ (ج) اور (د) کو تکمیل کرنے سے حاصل ہوتا ہے:

$$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا} + 1} = \text{مس} \text{ ا} + \text{مستقل}$$

$$\text{اور} - \int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا} + 1} = \text{مم} \text{ ا} + \text{مستقل}$$

ہمیں معلوم ہے کہ  $\text{مس}^1 \text{لا} = \frac{\pi}{4} - \text{مم}^1 \text{لا}$   
 اور اس لیے  $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا} + 1}$  کی قیمت  $\text{مس}^1 \text{لا} + \text{مستقل}^1 \text{مستقل} - \text{مم}^1 \text{لا}$   
 لکھی جاسکتی ہے۔  
 (۷)  $\text{قط}^1 \text{لا}$  کا تفرقی سر:-

$\text{ما} = \text{قط}^1 \text{لا}$  کو واحد قیمتی تفاعل بنانے کے لیے  $\text{ما}$  کی وہ  
 قیمت لی جاتی ہے جو صفر اور  $\frac{\pi}{4}$  کے درمیان ہو۔ اور جیسے  $\text{ما}$  صفر سے  
 $\frac{\pi}{4}$  تک اور  $\frac{\pi}{4}$  سے  $\frac{\pi}{2}$  تک بڑھتا ہے  $\text{لا}$  کی قیمت ایک سے  
 لاتنا ہی تک اور منفی لاتنا ہی سے -۱ تک بڑھتی ہے۔

اس لیے  $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$  مثبت ہوگا۔

$$\text{لا} = \text{قط}^1 \text{ما} \therefore \frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} = \text{قط}^1 \text{ما} \text{مس}^1 \text{ما}$$

$$\text{اور } \frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} = \frac{1}{\text{قط}^1 \text{ما} \text{مس}^1 \text{ما}} = \frac{1}{\text{لا} \text{لا} - 1} \text{ چونکہ } \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \text{ کی قیمت}$$

مثبت ہے۔  $\text{قم}^1 \text{لا}$  کو تفرق کرنا:-

$\text{ما} = \text{قم}^1 \text{لا}$  کو واحد قیمتی تفاعل بنانے کے لیے  $\text{ما}$  کی  
 وہ قیمت لی جاتی ہے جو  $\frac{\pi}{4} -$  اور  $\frac{\pi}{2} +$  کے درمیان ہے۔ اب جیسے  
 $\text{ما}$  کی قیمت  $\frac{\pi}{4} -$  سے صفر تک اور صفر سے  $\frac{\pi}{2} +$  تک بڑھتی ہے  
 ویسے  $\text{لا}$  کی قیمت -۱ سے  $\infty$  تک اور پھر  $\infty$  سے ایک تک  
 کم ہوتی ہے اس لیے  $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$  منفی ہوگا۔

$$\text{لا} = \text{قم}^1 \text{ما} \therefore \frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} = - \text{قم}^1 \text{ما} \text{مم}^1 \text{ما}$$

$$\therefore \frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} = - \text{قم}^1 \text{ما} \text{مم}^1 \text{ما} = - \frac{1}{\text{لا} \text{لا} - 1} \text{ چونکہ } \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \text{ منفی ہے۔}$$

ضابطہ (۷) اور (و) کو تکمیل کرنے سے

$$\int \frac{فرلا}{1-لا^۲} = قط^{-۱} لا + مستقل$$

$$اور - \int \frac{فرلا}{1-لا^۲} = قم^{-۱} لا + مستقل$$

اور جیسا کہ (۱) اور (ب) میں بتایا گیا ہے علامت کا فرق صرف صد قیمت کی تعریف کی وجہ سے پیدا ہوتا ہے

$$اور قم^{-۱} لا = \frac{\pi}{۲} + قط^{-۱} لا$$

اس لیے  $\pm \int \frac{فرلا}{1-لا^۲}$  کی قیمت قم<sup>-۱</sup> لا + مستقل یا قط<sup>-۱</sup> لا + مستقل لکھی جاسکتی ہے۔

## توضیحی مثالیں

مثال (۱) ع<sup>-۱</sup> [جب<sup>-۱</sup> (جم<sup>۲</sup>/۳)] کی قیمت دریافت کرو۔

$$ع<sup>-۱</sup> [جب<sup>-۱</sup> (جم<sup>۲</sup>/۳)] = \frac{۱}{جم^{۲/۳} - ۱} \times (-جب^{۲/۳}) = \frac{-\frac{۲}{۳} جب^{۲/۳}}{\frac{۲}{۳} جب^{۲/۳}} = -\frac{۲}{۲}$$

مثال (۲) فر<sup>۲</sup> [مس<sup>-۱</sup> (جم<sup>۲</sup> - جب<sup>۲</sup>)] کی قیمت دریافت کرو۔

$$فر<sup>۲</sup> [مس<sup>-۱</sup> (جم<sup>۲</sup> - جب<sup>۲</sup>)] = \frac{فر}{(جم<sup>۲</sup> - جب<sup>۲</sup>)} = \frac{جم<sup>۲</sup> - جب<sup>۲</sup>}{(جم<sup>۲</sup> - جب<sup>۲</sup>)^2} = \frac{جم<sup>۲</sup> - جب<sup>۲</sup>}{(جم<sup>۲</sup> - جب<sup>۲</sup>)^2} = \frac{جم<sup>۲</sup> - جب<sup>۲</sup>}{(جم<sup>۲</sup> - جب<sup>۲</sup>)^2}$$

## مشقی سوالات

ذیل کو تفرق کرو:-

$$\begin{aligned}
(۱) \text{ قظ}^1 (جم + لا + ۳) \quad (۲) \text{ جم}^1 (جب + لا) \quad (۳) \text{ جم}^1 \frac{لا}{و} \\
(۴) \text{ جب}^1 \frac{لا}{و} \quad (۵) \text{ مس}^1 \frac{لا}{و} \quad (۶) \text{ قظ}^1 \frac{لا}{و} \quad (۷) \text{ قظ}^1 \frac{لا}{و} - \text{قظ}^1 \frac{لا}{و} \\
(۸) \text{ قظ}^1 (لا - لا) \quad (۹) \text{ لا}^1 \text{ مس}^1 لا \quad (۱۰) \text{ لا}^1 \text{ مس}^1 لا + \frac{۵}{۴} \text{ مس}^1 \frac{لا}{و} \\
(۱۱) \text{ مس}^1 لا \quad (۱۲) \text{ لا}^1 لا - لا + ۲ \text{ مس}^1 \frac{لا}{و} \\
(۱۳) \text{ جب}^1 لا + لا \text{ قظ}^1 \frac{لا}{و} \\
(۱۴) \text{ قظ}^1 (لا + لا + ب + لا + ج) \times \text{قظ}^1 (لا + لا + ب + لا + ج) \\
\text{ذیل کے تکملوں کی قیمت دریافت کرو :-} \\
(۱۵) \int \frac{\text{فرلا}}{\frac{لا}{و} - \frac{لا}{و}} \quad (۱۶) \int \frac{\text{فرلا}}{\frac{لا}{و} - \frac{لا}{و}} \quad (۱۷) \int \frac{\text{فرلا}}{\frac{لا}{و} - \frac{لا}{و}} \\
(۱۸) \int \frac{\text{فرلا}}{\frac{لا}{و} + \frac{لا}{و}} \quad (۱۹) \int \frac{\text{فرلا}}{\frac{لا}{و} + \frac{لا}{و}} \quad (۲۰) \int \frac{\text{فرلا}}{\frac{لا}{و} + \frac{لا}{و}} \\
(۲۱) \int \frac{\text{فرلا}}{\frac{لا}{و} + \frac{لا}{و}} \quad (۲۲) \int \frac{\text{فرلا}}{\frac{لا}{و} + \frac{لا}{و}} \quad (۲۳) \int \frac{\text{فرلا}}{\frac{لا}{و} + \frac{لا}{و}} \\
(۲۴) \int \frac{\text{فرلا}}{\frac{لا}{و} - \frac{لا}{و}} \quad (۲۵) \int \frac{\text{فرلا}}{\frac{لا}{و} - \frac{لا}{و}} \quad (۲۶) \int \frac{\text{فرلا}}{\frac{لا}{و} - \frac{لا}{و}} \\
(۲۷) \int \frac{\text{فرلا}}{\frac{لا}{و} - \frac{لا}{و}} \quad (۲۸) \int \frac{\text{فرلا}}{\frac{لا}{و} - \frac{لا}{و}} \quad (۲۹) \int \frac{\text{فرلا}}{\frac{لا}{و} - \frac{لا}{و}} \\
(۳۰) \int \left( \frac{۱}{\frac{لا}{و} - \frac{لا}{و}} - ۳ \right) \text{ فرلا}
\end{aligned}$$

۳۷ - لوکار تم اور قوت متافاعلوں کی تعریف :-

پہلے باب میں بتایا گیا ہے کہ  $\frac{۱}{ن}$  (۱ +  $\frac{۱}{ن}$ ) ایک معین عدد کی طرف

مائل ہوتی ہے اور اس عدد کو قو سے تعبیر کیا جاتا ہے۔

$$25618 \dots = \dots + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + 1 + 1 = \text{قو}$$

$$\text{اسی طرح قو} = \frac{1}{\infty} = 0 \left( \frac{1}{\infty} + 1 \right) = 1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots$$

تفاعل قولا کو قوت مفاعل کہتے ہیں۔ اس کے مقلوب تفاعل

لوکارتمی تفاعل کی تعریف حسب ذیل کریں گے کہ اگر  $\text{لا} = \text{قو}$  تو کہتے ہیں کہ  $\text{لا}$  کا لوکارتم بہ اساس مساوی ہے  $\text{لا}$  کے اور علامتوں میں ظاہر کرتے ہیں کہ لوکارتم  $\text{لا} = \text{لا}$  اساس  $\text{لا}$  کی قیمت کچھ بھی لی جاسکتی ہے لیکن اعلیٰ ریاضی میں اساس قو اور حسابی سوال میں اساس  $\text{لا}$  لینے سے بہت سہولت ہوتی ہے اور اگر لوکارتم کا اساس واضح طور پر بیان نہ ہو تو احصا کے سوال میں قو اور حسابی سوال میں  $\text{لا}$  مان لیا جائے۔ لوکارتم کی ابتدائی خاصیتوں سے طالب علم الجبر میں خوب واقف ہے اور اس لیے یہاں بیان کرنے کی کوئی ضرورت نہیں ہے۔ لوکارتم مفاعل کی تعریف قوت مفاعل کے مقلوب تفاعل کی طرح کی گئی ہے۔ لیکن اعلیٰ ریاضی لوکارتم مفاعل کی تعریف بالعموم ایک مکملہ سے کیجاتی ہے۔ معیاری شکلوں میں بتایا گیا ہے کہ  $\text{لا}$  کی قیمت الجبر کے تفاعلوں کی رقوم میں نہیں بیان ہو سکتی ہے اس کے لیے ایک نیا تفاعل ایجاد کیا جاتا ہے جس کی تعریف ہوگی۔

$$\text{فرلا} = \text{لوکارتم} \text{ لا} + \text{مر} \text{ اس میں مستقل کو تعین کرنے کے لیے فرض کرو}$$

کہ لوکارتم  $\text{لا} = 1$ ۔ اس لیے  $\text{فرلا} = \text{لوکارتم} \text{ لا}$  اس تعریف سے لوکارتم تفاعل کی تمام خاصیتیں بہت صحت کے ساتھ ثابت ہو جاتی ہیں اور اس لیے یہ تعریف عام طور پر مروج ہے۔

نیز معلوم ہے کہ لوکارتم  $(\text{لا} + 1) = \text{لا} - \frac{\text{لا}}{2} + \frac{\text{لا}}{4} - \dots$  جبکہ  $\text{لا}$  اس پھیلاؤ کی مدد سے عددوں کے لوکارتم نکالے جاتے ہیں اور پھر اس کو



ابتدائی اصولوں سے لوکارقم کا تفریق نکالنے کے لیے

$$\begin{aligned} \text{مف م} &= \text{لوک} (\text{لا} + \text{مف لا}) - \text{لوک لا} = \text{لوک} \left( \frac{\text{لا} + \text{مف لا}}{\text{لا}} \right) = \text{لوک} \left( 1 + \frac{\text{مف لا}}{\text{لا}} \right) \\ \therefore \frac{\text{مف م}}{\text{مف لا}} &= \frac{\text{مف لا}}{\text{مف لا}} \times \text{لوک} \left( 1 + \frac{\text{مف لا}}{\text{لا}} \right) = \frac{\text{لا}}{\text{مف لا}} \times \text{لوک} \left( 1 + \frac{\text{مف لا}}{\text{لا}} \right) \\ &= \frac{\text{لا}}{\text{مف لا}} \times \text{لوک} \left( 1 + \frac{\text{مف لا}}{\text{لا}} \right) = \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\text{فر م}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{مف م}}{\text{مف لا}} = \frac{\text{لا}}{\text{مف لا}} \times \text{لوک} \left( 1 + \frac{\text{مف لا}}{\text{لا}} \right) \text{ اور اگر } \frac{\text{لا}}{\text{مف لا}} = \frac{\text{فر م}}{\text{فر لا}}$$

$$= \frac{\text{لا}}{\text{مف لا}} \times \text{لوک} \left( 1 + \frac{\text{مف لا}}{\text{لا}} \right) = \frac{\text{لا}}{\text{مف لا}} \times \text{لوک} \left( \frac{\text{لا} + \text{مف لا}}{\text{لا}} \right) = \frac{\text{لا}}{\text{مف لا}} \times \text{لوک} \left( \frac{\text{فر م}}{\text{فر لا}} \right)$$

اسی طرح لوک لا کا تفریق معلوم کرنے کے لیے  
 $\text{لوک لا} = \text{لوک لا} \times \text{لوک لا}$

$$\therefore \frac{\text{فر لا}}{\text{فر لا}} [\text{لوک لا}] = \frac{\text{لا}}{\text{مف لا}} \times \text{لوک لا} = \frac{\text{لا}}{\text{مف لا}} \times \text{لوک لا} \times \frac{\text{فر لا}}{\text{فر لا}}$$

$$\text{اور بحال سے } \frac{\text{فر لا}}{\text{فر لا}} = \text{لوک لا} + \text{مستقل}$$

دفعہ ۳۶۱ میں لا کا تفریق سر نکالا گیا ہے جبکہ مثبت صحیح عدد ہے۔

اگر منفی مقدار یا کسر ہو تو ضابطہ ثابت کرنے کے لیے فرض کرو کہ  $\text{لا} = \text{لا}^+$   
 اور لوکارقم لینے سے

$$\text{لوک م} = \text{ن لوک لا}$$

$$\text{اس لیے } \frac{1}{\text{لا}} \times \text{ن} = \frac{\text{فر م}}{\text{فر لا}}$$

$$\therefore \frac{\text{فر م}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{ن} \times \text{لا}}{\text{لا}} = \frac{\text{ن} \times \text{لا}^+}{\text{لا}^+}$$

(ج) دو کو تفریق کرنا جبکہ اور دونوں متغیر لا کے تفاعل ہیں۔



فرض کرو کہ  $ر = ۱$

اس کا لوکار رقم لینے سے

لوک  $۱ = ۱$  و لوک  $۵$

تفرق کرنے سے  $\frac{۱}{۱۰} \text{ فرما} = \frac{\text{فرما}}{۱۰} \text{ لوک } ۵ + ۵ \times \frac{۱}{۵} \frac{\text{فرما}}{۱۰}$

اس لیے  $\frac{\text{فرما}}{۱۰} = ۱ \times \text{لوک } ۵ \times \frac{\text{فرما}}{۱۰} + ۵ \times \frac{۱}{۵} \frac{\text{فرما}}{۱۰}$

الفاظ میں اس تفرق کو یوں بیان کر سکتے ہیں کہ  $ر$  کا تفرقی سر دو رقموں کا مجموعہ ہے جس کی پہلی رقم قوت نما کو متغیر اور  $۵$  کو مستقل مان کر تفرق کرنے سے حاصل ہوتی ہے اور دوسری رقم قوت نما کو مستقل مان کر تفاعل  $۵$  کو تفرق کرنے سے۔

## توضیحی مثالیں

مثال (۱)  $(۱ - \frac{۲}{۳})(۱ - \frac{۲}{۳})$  کو بلحاظ  $۱۰$  کے تفرق کرو۔

عف  $(۱ - \frac{۲}{۳})(۱ - \frac{۲}{۳}) = [۱ - \frac{۲}{۳} \text{ و } ۱ - \frac{۲}{۳}]$  عف  $\frac{۲}{۳}(۱ - \frac{۲}{۳}) + \frac{۲}{۳}(۱ - \frac{۲}{۳})$  عف  $۱ - \frac{۲}{۳}$

$= \frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۳} (۱ - \frac{۲}{۳}) + \frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۳} (۱ - \frac{۲}{۳}) + ۱ - \frac{۲}{۳}$

$= \frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۳} (۱ - \frac{۲}{۳}) + \frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۳} (۱ - \frac{۲}{۳}) + ۱ - \frac{۲}{۳}$

مثال (۲) عف [لوک (۲ جم ۳ - ۵ جب ۵)] کی قیمت دریافت کرو۔

عف [لوک (۲ جم ۳ - ۵ جب ۵)] =  $\frac{۱}{۲ \text{ جم } ۳ - ۵ \text{ جب } ۵} \times$  عف (۲ جم ۳ - ۵ جب ۵)

$$= \frac{۱ - ۱۳ جب ۵ - ۵ جم ۱}{۲ جم ۳ - ۵ جب ۱} = \frac{۱ - ۱۳ جب ۵ - ۵ جم ۱}{۲ جم ۳ - ۵ جب ۱}$$

مثال (۳) [مس لا فلا اور [م لا فلا کی قیمت دریافت کرد۔

ہمیں معلوم ہے کہ علف لوک جب لا =  $\frac{۱}{جب لا}$  علف جب لا =  $\frac{۱}{جم لا}$  = مم لا

اور علف لوک جم لا =  $\frac{۱}{جم لا} \times (- جب لا) = - مس لا$

∴ علف لوک قلا = مس لا

ان نتیجوں کو تکمیل کرنے سے  
[م لا فلا = لوک جب لا + مستقل

اور [مس لا فلا = لوک قلا + مستقل

= مستقل - لوک جم لا

## مشقی سوالات ۱۸

ذیل کو تفریق کرو: —  
(۱)  $\frac{۱}{جب لا}$  (۲) لوک (۳)  $(۱ + لا)$  (۴)  $\frac{۱}{لا}$

(۵)  $(۱ - لا)$  (۶) لوک (۷)  $(۲ لا + ۳ - ۵)$

(۸)  $\frac{۱}{لا + ۲}$  (۹) لوک (۱۰)  $\frac{۱}{(۲ لا + ۳)}$

(۱۱) مس لا (۱۲) مس لا (۱۳)  $\frac{۱}{(قلا لا)}$

(۱۴)  $\frac{۱}{(۳ - لا)}$  (۱۵)  $\frac{۱}{(لوک (۳ + لا ۲))}$

ذیل کے تکملوں کی قیمت دریافت کرو: —

$$(۱۵) \int \frac{1}{x^2+1} dx \quad (۱۶) \int \frac{1}{x^2-1} dx$$

$$(۱۷) \int \frac{1}{x^2+1} dx \quad (۱۸) \int \frac{1}{x^2-1} dx$$

$$(۱۹) \int \frac{1}{x^2+1} dx \quad (۲۰) \int \frac{1}{x^2-1} dx$$

$$(۲۱) \int \frac{1}{x^2+1} dx \quad (۲۲) \int \frac{1}{x^2-1} dx$$

۸ و ۳ - اعلیٰ رتبہ کے تفرقی سر: - کسی تفاعل کو تفرق کرنے

سے اس کا مشتق تفاعل حاصل ہوتا ہے۔ یہ بھی بالعموم متبوع متغیر کا تفاعل ہوگا اور اس کو دوبارہ تفرق کیا جاسکتا ہے۔ مثلاً فرض کرو  $u = x^2$  تو  $u = x^2$  اور چونکہ  $u = x^2$  کا تفاعل ہے اس کو دوبارہ تفرق کرنے سے  $u = x^2$  حاصل ہوگا۔ یعنی  $u = x^2$  کو دو مرتبہ مسلسل تفرق کرنے سے  $u = x^2$  حاصل ہوتا ہے۔ علامتوں میں اس چیز کو یوں بیان کریں گے:

$$\frac{1}{x^2} = (u) \text{ ع } = \left[ \frac{1}{x^2} \right] \frac{1}{x^2}$$

$\frac{1}{x^2} \left[ \frac{1}{x^2} \right]$  کو اختصاراً  $\frac{1}{x^2}$  لکھتے ہیں اور اسی طرح  $\frac{1}{x^2} \left[ \frac{1}{x^2} \right]$  کو  $\frac{1}{x^2}$  سے تعبیر کریں گے۔

دو مرتبہ تفرق کرنے کے نتیجے کو دوسرے رتبہ کا تفرقی سر کہاجاتا ہے اور  $n$  مرتبہ مسلسل تفرق کرنے سے  $n$  رتبہ کا تفرقی سر  $\frac{1}{x^2}$  حاصل ہوگا۔ نیز تفرق کے عمل  $\frac{1}{x^2}$  کو ع سے بھی تعبیر کیا گیا ہے۔ اس لیے دوسرے رتبے کے تفرقی سر کا مال  $\frac{1}{x^2}$  ہوگا ع (ع) یعنی ع اور اسی طرح

تیسرے چوتھے و غیر رتبہ کے تفرقی سروں کے حامل ہونگے عفت<sup>۳</sup> عفت<sup>۲</sup> عفت<sup>۱</sup> عفت<sup>۰</sup>۔۔۔۔۔ یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ حامل عفت الجبر کے تین مشہور قوانین کی پابندی کرتا ہے اور عفت کو الجبر کی مقدار کی طرح استعمال کیا جاسکتا ہے۔

چونکہ غلطی کا امکان ہے اس لیے کر بیان کر دیا جاتا ہے کہ  $(\frac{1}{x})$  یا  $(\frac{1}{x^2})$  عفت<sup>۱</sup> یا  $(\frac{1}{x^3})$  عفت<sup>۲</sup> کے تفرقی سر کا مربع ہے اور  $\frac{1}{x^2}$  یا عفت<sup>۱</sup> دوسرے رتبہ کا تفرقی سر ہے۔ یہ دونوں چیزیں بالکل مختلف ہیں۔

اب اگر  $f(x)$  کے پہلے رتبہ کے تفرق کو  $f'(x)$  یا  $f''(x)$  سے تعبیر کیا جائے تو ظاہر ہے کہ دوسرے رتبہ کے تفرق کو  $f''(x)$  یا  $f'''(x)$  سے اور اسی طرح تیسرے چوتھے رتبوں وغیرہ کے تفرقی سروں کو  $f^{(4)}(x)$  یا  $f^{(5)}(x)$  سے۔

بعض سوالوں میں تفاعل کے ن رتبہ کے تفرقی سر کو آسانی سے بیان کیا جاسکتا ہے اور ان کی اہم صورتیں بطور مثال کے دی جائیگی۔ باب چہارم میں اعلیٰ رتبہ کے تفرقی سر اور بالخصوص دوسرے رتبہ کے تفرقی سر کے علم ہندسہ اور عملی ریاضی میں اطلاقات بیان کیے جائیں گے۔

### توضیحی مثالیں

مثال (۱)  $f(x) = x^2$  کے رتبہ کا تفرقی سر دریافت کرو جبکہ  $x > 0$

$$f'(x) = 2x$$

$$f''(x) = 2$$

اسی طرح  $f^{(3)}(x) = 0$   $f^{(4)}(x) = 0$   $f^{(5)}(x) = 0$   $f^{(6)}(x) = 0$   $f^{(7)}(x) = 0$   $f^{(8)}(x) = 0$   $f^{(9)}(x) = 0$   $f^{(10)}(x) = 0$   $f^{(11)}(x) = 0$   $f^{(12)}(x) = 0$   $f^{(13)}(x) = 0$   $f^{(14)}(x) = 0$   $f^{(15)}(x) = 0$   $f^{(16)}(x) = 0$   $f^{(17)}(x) = 0$   $f^{(18)}(x) = 0$   $f^{(19)}(x) = 0$   $f^{(20)}(x) = 0$   $f^{(21)}(x) = 0$   $f^{(22)}(x) = 0$   $f^{(23)}(x) = 0$   $f^{(24)}(x) = 0$   $f^{(25)}(x) = 0$   $f^{(26)}(x) = 0$   $f^{(27)}(x) = 0$   $f^{(28)}(x) = 0$   $f^{(29)}(x) = 0$   $f^{(30)}(x) = 0$   $f^{(31)}(x) = 0$   $f^{(32)}(x) = 0$   $f^{(33)}(x) = 0$   $f^{(34)}(x) = 0$   $f^{(35)}(x) = 0$   $f^{(36)}(x) = 0$   $f^{(37)}(x) = 0$   $f^{(38)}(x) = 0$   $f^{(39)}(x) = 0$   $f^{(40)}(x) = 0$   $f^{(41)}(x) = 0$   $f^{(42)}(x) = 0$   $f^{(43)}(x) = 0$   $f^{(44)}(x) = 0$   $f^{(45)}(x) = 0$   $f^{(46)}(x) = 0$   $f^{(47)}(x) = 0$   $f^{(48)}(x) = 0$   $f^{(49)}(x) = 0$   $f^{(50)}(x) = 0$   $f^{(51)}(x) = 0$   $f^{(52)}(x) = 0$   $f^{(53)}(x) = 0$   $f^{(54)}(x) = 0$   $f^{(55)}(x) = 0$   $f^{(56)}(x) = 0$   $f^{(57)}(x) = 0$   $f^{(58)}(x) = 0$   $f^{(59)}(x) = 0$   $f^{(60)}(x) = 0$   $f^{(61)}(x) = 0$   $f^{(62)}(x) = 0$   $f^{(63)}(x) = 0$   $f^{(64)}(x) = 0$   $f^{(65)}(x) = 0$   $f^{(66)}(x) = 0$   $f^{(67)}(x) = 0$   $f^{(68)}(x) = 0$   $f^{(69)}(x) = 0$   $f^{(70)}(x) = 0$   $f^{(71)}(x) = 0$   $f^{(72)}(x) = 0$   $f^{(73)}(x) = 0$   $f^{(74)}(x) = 0$   $f^{(75)}(x) = 0$   $f^{(76)}(x) = 0$   $f^{(77)}(x) = 0$   $f^{(78)}(x) = 0$   $f^{(79)}(x) = 0$   $f^{(80)}(x) = 0$   $f^{(81)}(x) = 0$   $f^{(82)}(x) = 0$   $f^{(83)}(x) = 0$   $f^{(84)}(x) = 0$   $f^{(85)}(x) = 0$   $f^{(86)}(x) = 0$   $f^{(87)}(x) = 0$   $f^{(88)}(x) = 0$   $f^{(89)}(x) = 0$   $f^{(90)}(x) = 0$   $f^{(91)}(x) = 0$   $f^{(92)}(x) = 0$   $f^{(93)}(x) = 0$   $f^{(94)}(x) = 0$   $f^{(95)}(x) = 0$   $f^{(96)}(x) = 0$   $f^{(97)}(x) = 0$   $f^{(98)}(x) = 0$   $f^{(99)}(x) = 0$   $f^{(100)}(x) = 0$

مثال (۲) عفت<sup>۱</sup> (جب لا) کی قیمت دریافت کرو۔

$$f'(x) = 2x = \text{جم لا} = \text{جب لا} + \frac{2}{x}$$

$$f''(x) = 2 = \text{جم لا} + \frac{2}{x^2}$$

$$f^{(3)}(x) = 0 = \text{جب لا} + \frac{2}{x^3} + \frac{2}{x^4}$$

$$\therefore \text{عفن}^3 (\text{جب لا}) = \text{جب} (\frac{\pi}{4} \times 3 + لا)$$

$$\therefore \text{عفن}^2 (\text{جب لا}) = \text{جب} (\frac{\pi}{4} + لا)$$

$$\text{اسی طرح عفن} (\text{جم لا}) = \text{جم} (\frac{\pi}{4} + لا)$$

مثال (۳) عفن [لوک (لا+لا) کی قیمت دریافت کرو۔

$$\frac{1}{لا + لا} = \text{عفن} [\text{لوک} (لا + لا)]$$

$$\frac{1-}{لا(لا+لا)} = \text{عفن}^2 [\text{لوک} (لا + لا)]$$

$$\frac{(2-)\times(1-)}{لا(لا+لا)} = \text{عفن}^3 [\text{لوک} (لا + لا)]$$

$$\therefore \text{عفن}^n [\text{لوک} (لا + لا)] = \frac{(1+(-ن))\dots(3-)\times(2-)(1-)}{لا(لا+لا)^n}$$

مثال (۴) عفن و لا کی قیمت دریافت کرو۔

$$\text{عفن} \text{ و } لا = \text{عفن} \text{ و } لا = \text{عفن} \text{ و } لا = \text{عفن} \text{ و } لا$$

$$\text{اسی طرح عفن} \text{ و } لا = \text{عفن} \text{ و } لا$$

مثال (۵) عفن [لا × لا] کی قیمت دریافت کرو۔ جہاں لا متغیر لا

کوئی تفاعل ہے۔

$$\text{عفن} (\text{لا} \times لا) = لا \text{ و } لا + لا \text{ و } لا = لا (\text{عفن} + لا)$$

$$\text{اور عفن}^2 (\text{لا} \times لا) = \text{عفن} [لا (\text{عفن} + لا)] = لا (\text{عفن} + لا)^2$$

$$\text{اسی طرح عفن}^n (\text{لا} \times لا) = لا (\text{عفن} + لا)^n$$

منتهی سوالات ۱۹

ذیل کی قیمت دریافت کرو:-

$$(۱) \text{ عفا } (۵ - ۷ - ۷ + ۲) \quad (۲) \text{ عفا } (۶ + ۷ - ۷ - ۱۲)$$

$$(۳) \text{ عفا } \text{جم} (۲ + ۷ - ۳) \quad (۴) \text{ عفا } (۷ - ۳)$$

$$(۵) \text{ عفا } [ \text{لوک} ] \quad (۶) \text{ عفا } \text{جب}$$

$$(۷) \text{ اگر لا} = \text{جم} (ن + ۷) + \text{ب جب} (ن + ۷)$$

$$\text{تو ثابت کرو کہ عفا} + \text{ن} = ۷$$

$$(۸) \text{ ما} = \text{لو} = \text{جم} (ن) \text{ تو عفا} \text{ ما معلوم کرو}$$

$$(۹) \text{ عفا} (جب لا) \text{ معلوم کرو}$$

$$(۱۰) \text{ اگر لا} = \text{جم} (لوک) + \text{ج جب} (لوک لا)$$

$$\text{تو ثابت کرو کہ } \frac{\text{فر}^۲}{\text{فر}^۱} + \frac{\text{فر}^۱}{\text{فر}^۲} + لا = ۷$$

$$(۱۱) \text{ اگر ط} = \text{جم} \left( \frac{\text{ج}}{\text{ن}} + ۷ \right)$$

$$\text{تو ثابت کرو کہ } \frac{\text{فر}^۲}{\text{فر}^۱} + \text{ج ط} = ۷$$

$$(۱۲) \text{ لا} = \text{ما} \text{ تو } \frac{\text{فر}^۱}{\text{فر}^۲} \text{ کی قیمت حاصل کرو}$$

$$(۱۳) \text{ اگر ما} = \text{ج} + \text{لو} + \text{جم} + \text{و}$$

$$\text{تو ثابت کرو کہ عفا} + \text{ما} - ۷ = \text{عفا} + ۱۲ = ۷$$

$$(۱۴) \text{ اگر ما} = \text{ج} + \text{لو} + \text{جم} + \text{و} + \text{و}$$

$$\text{تو ثابت کرو کہ عفا} + \text{ما} - ۱۳ = \text{عفا} + ۱۲ = ۷$$

ذیل کی قیمت دریافت کرو :-

$$(۱۵) \frac{\text{فر}^۲}{\text{فر}^۱} \quad (۱۶) \text{ عفا} [ \text{لوک} (۷ - ۳) ]$$

$$(۱۷) \text{ عفا} (لا + ۷) \quad (۱۸) \text{ عفا} (جب لا)$$

|   |   |
|---|---|
| (۱۹) ع (جب لا) س لا   | (۲۰) ع (لا) لا  |
| (۲۱) $\int \int \int \frac{1}{(3-1)^2} \int \int \int \frac{1}{(3-1)^2} \int \int \int \frac{1}{(3-1)^2}$ | (۲۲) $\int \int \int \frac{1}{(3-1)^2} \int \int \int \frac{1}{(3-1)^2} \int \int \int \frac{1}{(3-1)^2}$ |
| (۲۳) $\int \int \int \frac{1}{(3-1)^2} \int \int \int \frac{1}{(3-1)^2} \int \int \int \frac{1}{(3-1)^2}$ | (۲۴) $\int \int \int \frac{1}{(3-1)^2} \int \int \int \frac{1}{(3-1)^2} \int \int \int \frac{1}{(3-1)^2}$ |
| (۲۵) $\int \int \int \frac{1}{(3-1)^2} \int \int \int \frac{1}{(3-1)^2} \int \int \int \frac{1}{(3-1)^2}$ | (۲۶) $\int \int \int \frac{1}{(3-1)^2} \int \int \int \frac{1}{(3-1)^2} \int \int \int \frac{1}{(3-1)^2}$ |

### ۳۹- جزوی شتق :- اب تک ہم نے ایسے تفاعلوں

پر غور کیا جن میں متغیروں کی تعداد دو ہے۔ ظاہر ہے کہ ان دو متغیروں میں سے کسی ایک کو کوئی بھی قیمت دے دیں تو دوسرے کی قیمت متعین ہو جاتی ہے۔ اس لیے اول الذکر کو متبوع متغیر اور موخر الذکر کو تابع متغیر کہتے ہیں۔ اب اگر تفاعل میں دو سے زیادہ متغیر ہوں فرض کرو تین ہوں تو دو متغیروں کو آزادانہ کچھ بھی قیمت دینے سے تیسرے متغیر کی قیمت معلوم ہو جاتی ہے۔ اس لیے ایسے تفاعل میں دو متغیروں کو متبوع متغیر اور ایک کو تابع متغیر کہتے ہیں۔ برخلاف اس کے اگر تین متغیروں میں دو رشتے ہوں تو ابجرا سے حل کر کے کسی دو متغیروں کو علیحدہ علیحدہ ایک متغیر کی رقوم میں دو رشتوں سے بیان کیا جاسکتا ہے۔ اس لیے اس میں دراصل ایک ہی متبوع متغیر ہے اور دو تابع متغیر ہیں۔ اور ظاہر ہے کہ متبوع متغیر کی قیمت میں فرق کی وجہ سے دونوں تابع متغیروں کی قیمتوں میں فرق ہوگا اور ان سے دونوں تابع متغیروں کے تفرقی سر حاصل ہو جائیں گے۔ لیکن اگر کسی تفاعل میں دو متبوع متغیر ہوں اور ایک تابع متغیر ہو فرض کرو کہ  $y = f(x, z)$  تو چونکہ لا اور ما متبوع متغیر ہیں اس لیے لا کی قیمت کے فرق کا ما کی قیمت پر کوئی اثر نہیں پڑتا اور برعکس اس کے۔ صرف لا کی قیمت کے فرق سے  $y$  کی قیمت میں فرق آتا ہے اور اسی طرح صرف ما کی قیمت کے فرق سے لا کے اس قسم کے فرق کو جزوی فرق کہتے ہیں اور علامت میں جف سے اختصار کرتے ہیں۔

پس ی + جف ی = ف (لا + جف لا، ما) جہاں ما کی قیمت میں کوئی فرق واقع نہیں ہوا۔ اب اگر  $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}}$  =  $\frac{\text{ف (لا + جف لا، ما)}}{\text{جف لا}}$  کی انتہا وجود رکھتی ہے جبکہ جف لا ←۔ تو کہتے ہیں کہ ی بلحاظ لا کے جزوی تفرق پذیر ہے اور  $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}}$  کو ی کا بلحاظ لا پہلے رتبے کا جزوی مشتق کہتے ہیں۔

اسی طرح  $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}} = \frac{\text{ف (لا، ما + جف ما)}}{\text{جف ما}}$  وجود

رکھتا ہو تو  $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}}$  کو ی کا بلحاظ ما جزوی مشتق کہتے ہیں۔ دفعہ ۳۲۸ سے ظاہر ہے کہ پہلے رتبے کے جزوی مشتق بھی بالعموم لا اور ما کے متعامل ہونگے اور انہیں پھر لا اور ما کے لحاظ سے جزو آ تفرق لکھا جاسکتا ہے۔ سادہ تفرقی سرور کی ترتیم کے مطابق دوسرے رتبے کے جزوی مشتق ہونگے۔

$$\frac{\text{جف لا}}{\text{جف لا}} = \left( \frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} \right) = \frac{\text{جف}^1 \text{ ی}}{\text{جف لا}^1} = \frac{\text{جف}}{\text{جف ما}} = \left( \frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}} \right) = \frac{\text{جف}^1 \text{ ی}}{\text{جف ما}^1}$$

اور  $\frac{\text{جف لا}}{\text{جف ما}} = \left( \frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}} \right) = \frac{\text{جف}^1 \text{ ی}}{\text{جف لا جف ما}} = \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} = \left( \frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} \right) = \frac{\text{جف}^1 \text{ ی}}{\text{جف لا جف ما}}$  اسی طرح تیسرے اور اعلیٰ رتبے کے جزوی مشتقات - چند شرائط کے تحت جو اکثر سوالات میں پوری ہوتی ہیں بلحاظ لا اور ما دوسرے رتبے کے جزوی مشتق میں ترتیب تفرق کو باہم بدلا جاسکتا ہے - یعنی

$$\frac{\text{جف}^1 \text{ ی}}{\text{جف لا جف ما}} = \frac{\text{جف}^1 \text{ ی}}{\text{جف ما جف لا}}$$

انگلے باب میں جزوی مشتقوں کی ہندسی تعبیر بتائی جائیگی۔



## توضیحی مثالیں

مثال (۱)  $۱۲ + ۶۳ - ی = ۵$  تین ابعاد میں ایک مستوی کو تعبیر

کرتا ہے۔  $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}}$  اور  $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}}$  کی قیمت دریافت کرو۔

$$۵ = ۱۲ + ۶۳ - ی$$

$$\therefore \frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} = ۲ \text{ اور } \frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}} = ۳$$

مثال (۲) : — اگر  $۲ لا + ۳ لا ما + ۵ ما - ۶ لا + ۷ لا = ۶$

تو  $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}}$  اور  $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا جف ما}}$  کی قیمت دریافت کرو۔

$$\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} = ۶ - ۶۳ + ۱۲ = ۳ \text{ اور } \frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}} = ۱۰ + ۶۱ - ۷ = ۹$$

$$\text{اس لیے } \frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} = ۳, \frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}} = ۱۰ \text{ اور } \frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا جف ما}} = \frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما جف لا}} = ۳$$

## مشقی سوالات ۲۰

(۱)  $۱۲ لا + ۶۳ ما + ی = ۵$  میں  $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}}$  اور  $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}}$  کی قیمت دریافت کرو۔ نیز دوسرے رتبے کے جزوی مشتقوں کی قیمت دریافت کرو۔

(۲) اگر  $۲ لا + ۳ لا جف ما + ۵ جف ی = ۶$  اور  $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} = ۳$  کی قیمت دریافت کرو۔

(۳)  $۱۲ لا + ۶۳ ما + ی = ۵$  میں جب  $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} = ۲$  اور  $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}} = ۳$  اور دوسرے رتبے کے جزوی مشتقات کی قیمت معلوم کرو۔

$$(۴) \quad ۱ = (۱لا + ۲ب + ۳ج ی) \text{ سے جف } \frac{۱}{جف ی} \text{ کی قیمت معلوم کرو۔}$$

$$(۵) \quad \text{اگر } ۱ = ۲لا - ۳لا + ۴لا \text{ تو ثابت کرو کہ}$$

$$لا \frac{جف ی}{جف لا} + ما \frac{جف ی}{جف ما} = ۵ ی$$

$$(۶) \quad \text{اگر } ۱ = ۲لا + ۳ب + ۴ج ی \text{ تو } (جف لا) + (جف ی) = ۲$$

کی قیمت معلوم کرو۔

$$(۷) \quad \text{اگر } ۱ = ۳لا + ۴ب + ۵ج ی \text{ تو}$$

$$\frac{جف ی}{جف لا} + \frac{جف ی}{جف ما} + \frac{جف ی}{جف ی} \text{ کی قیمت حاصل کرو۔}$$

$$(۸) \quad \text{اگر } ۱ = ۴لا + ۵ب + ۶ج ی \text{ تو ثابت کرو کہ}$$

$$جب ۱ \frac{جف ی}{جف لا} + جب ۲ \frac{جف ی}{جف ما} + جب ۳ \frac{جف ی}{جف ی} = ۲$$

## باب سوم پر متفرق سوالات

ذیل کے تناظر کو تفریق کرو :-

$$(۱) \quad (۱ - ۲لا + ۳ب) \quad (۲) \quad \frac{۲(۱ - ۳لا)}{۱ - ۲لا + ۳ب}$$

$$(۳) \quad جب \left( \frac{۳ + ۴ب}{۱ - ۲لا} \right) \quad (۴) \quad مس \left( \frac{۱}{۱ - ۲لا} \right)$$

$$(۵) \quad جب \left( \frac{۲لا - ۱}{۱ - ۲لا} \right) \quad (۶) \quad جم \left( \frac{۴}{۱ - ۲لا} \right)$$

$$(۷) \quad مس \left( \frac{۴ - ۲لا}{۱ - ۲لا} \right) \quad (۸) \quad تم \left( \frac{۱}{۱ - ۲لا} \right)$$

- (۹) لوک (جب ط)  $\frac{لا}{لا + ۱}$  (۱۰)
- (۱۱) لوک  $\frac{لا - ۱}{لا + ۱}$  (۱۲)  $\frac{لا + ۱}{لا - ۱}$
- (۱۳)  $\frac{لا + ۱}{لا - ۱}$  (۱۴)  $\frac{لا + ۱}{لا - ۱}$
- (۱۵)  $\frac{لا + ۱}{لا - ۱}$  (۱۶)  $\frac{لا + ۱}{لا - ۱}$
- (۱۷)  $\frac{لا + ۱}{لا - ۱}$  (۱۸)  $\frac{لا + ۱}{لا - ۱}$
- (۱۹)  $\frac{لا + ۱}{لا - ۱}$  (۲۰)  $\frac{لا + ۱}{لا - ۱}$
- (۲۱) (جب لا) مس لا (۲۲) (جب لا) مس لا
- ذیل کے تکمیلوں کی قیمت دریافت کرو :-

- (۲۳)  $\int \frac{لا + ۱}{لا - ۱} دلا$  (۲۴)  $\int \frac{لا + ۱}{لا - ۱} دلا$
- (۲۵)  $\int \frac{لا + ۱}{لا - ۱} دلا$  (۲۶)  $\int \frac{لا + ۱}{لا - ۱} دلا$
- (۲۷)  $\int \frac{لا + ۱}{لا - ۱} دلا$  (۲۸)  $\int \frac{لا + ۱}{لا - ۱} دلا$
- (۲۹)  $\int \frac{لا + ۱}{لا - ۱} دلا$  (۳۰)  $\int \frac{لا + ۱}{لا - ۱} دلا$
- (۳۱)  $\int \frac{لا + ۱}{لا - ۱} دلا$  (۳۲)  $\int \frac{لا + ۱}{لا - ۱} دلا$
- (۳۳)  $\int \frac{لا + ۱}{لا - ۱} دلا$  (۳۴)  $\int \frac{لا + ۱}{لا - ۱} دلا$
- (۳۵)  $\int \frac{لا + ۱}{لا - ۱} دلا$  (۳۶)  $\int \frac{لا + ۱}{لا - ۱} دلا$

$$(۳۸) \int \text{مس} (۳+۲۲) \text{فرلا} \quad (۳۷) \int \frac{\text{لا فرلا}}{(۳+لا)(۱+لا)}$$

$$(۳۹) \int \text{قط} (۳-لا) \text{فرلا} \quad (۴۰) \int \frac{\text{فرلا}}{۲۲۳-۱۲۱}$$

ذیل کی قیمت دریافت کرو :-

$$(۴۱) \text{عفا}^۱ (\text{لا}^۲ \text{فرلا}^۱) \quad (۴۲) \text{عفا}^۱ (\text{جم} ۲۳)$$

$$(۴۳) \text{عفا}^۱ \left( \frac{۲}{لا-۳} \right) \quad (۴۴) \text{عفا}^۱ (\text{جب} ۲۲)$$

$$(۴۵) \text{عفا}^۱ [\text{فوجب} (لا^۲)] \quad (۴۶) \text{عفا}^۱ [\text{عم}^۳ (\text{لوک} ۱۱۱)]$$

$$(۴۷) \text{عفا}^۱ (\text{موقط}^۱ ۲۱) \quad (۴۸) \text{عفا}^۱ (\text{مس مطلوب} ۱۱)$$

$$(۴۹) \text{عفا}^۱ [(۱-۲۳) \text{فرلا}^۱] \quad (۵۰) \text{عفا}^۱ \left[ \frac{۲۲+۱}{۲۲+۱} \right]$$

$$(۵۱) \text{عفا}^۱ (\text{لوک} ۱) \left[ \frac{۲۲-۱}{۲۲+۱} \right]$$

ذیل کی مساواتوں میں پہلے اور دوسرے رتبے کے جنوی مشتقوں کی قیمتیں

دریافت کرو - تابع متغیر واضح نہ ہونے کی صورت میں بتا دیا گیا ہے -

$$(۵۲) ۱ = \frac{۲}{ج} + \frac{۲}{ب} + \frac{۲}{ا} \quad (\text{تابع متغیری})$$

$$(۵۳) ۱ = ۲۳ - ۲۲ + ۲۱ \quad (\text{تابع متغیری})$$

$$(۵۴) ۲ = \frac{۲}{۲} + \frac{۲}{۳} - \frac{۲}{۵} \quad (۵۵) ۱ = \text{جب} ۲۲ + \text{جب} ۲۱$$

$$(۵۶) ۱ = \text{جم}^۱ \left( \frac{۲۲}{۲۲+۱} \right)$$

$$(۵۷) \text{ د } = \text{ لوک } (لا + ما + ی) - \text{ لوک } (لا ما ی)$$

$$(۵۸) \text{ د } = \text{ و } لا + ما + ی = \text{ ی } (۵۹) \text{ و } لا + ی = \text{ لوک } (لا + ما)$$

$$(۶۰) \text{ اگر } ی = ۳ لا + ما + ۲ لا + ما - لا + ما - ۷ لا + ما \text{ تو ثابت کرو کہ}$$

$$لا \text{ جف } لا + ما \text{ جف } ی = ۷ ی$$

ذیل کے تفاعلوں میں تصدیق کرو کہ دونوں متبوع متغیروں کے دوسرے  
رہتے کے جزوی مشتق میں ترتیب تفریق سے کوئی فرق واقع نہیں ہوتا

$$\text{یعنی } \frac{\text{جف } لا \text{ جف } ی}{\text{جف } لا \text{ جف } ی} = \frac{\text{جف } ی \text{ جف } لا}{\text{جف } ی \text{ جف } لا}$$

$$(۶۱) ی = \text{ جب } (لا + ما) \quad (۶۲) ی = \frac{لا + ما}{لا - ما}$$

$$(۶۳) ی = \frac{لا}{ما} \text{ مس } لا \quad (۶۴) ی = \text{ جب } (طہ + ظہ)$$

$$(۶۵) \text{ اگر } د = ۶ و + ما + ی + ۳ و + لا + ی + ۲ و + لا + ما - لا ما ی$$

$$\text{تو } \frac{\text{جف } د}{\text{جف } لا \text{ جف } ی} = ۱۲ (و + ما + ی + و + لا + ی + و + لا + ما)$$

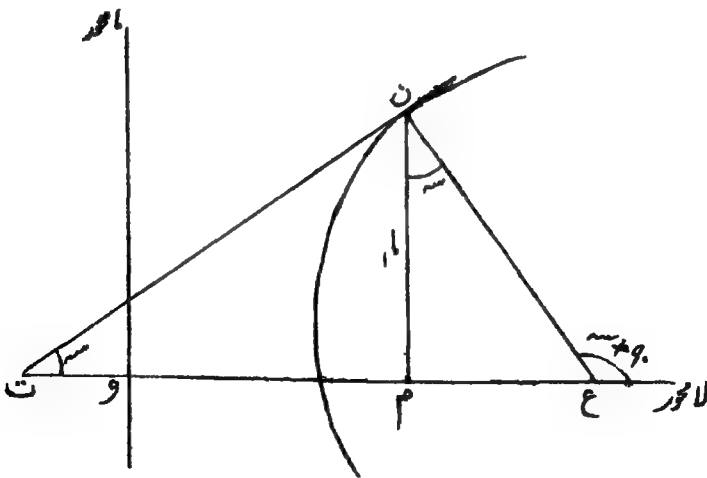
$$(۶۶) \text{ اگر } د = (ما ی) + و + ی + (ی لا) + و + ی + (لا ما) + و + ی$$

$$\text{تو } \frac{\text{جف } د}{\text{جف } لا \text{ جف } ی} = و + ی + و + ی + و + ی$$

## باب چہارم تفرقی سر کے اطلاقات

۴۱ :- گذشتہ باب میں تفرق اکمل کرنے کا عمل بتایا گیا ہے اور یہ بھی بتایا گیا ہے کہ علم ہندسہ میں تفرقی سر مخنی کے ڈھال کو تعبیر کرتا ہے اور طبعی سوالوں میں بدلنے کی شرح کو۔ اس باب میں اس تعبیر کی وجہ سے ہندسی اور طبعی سوالوں کے حل کرنے میں جس قدر سہولتیں ہوتی ہیں ان کا کچھ ذکر کیا جائیگا۔ مضامین احصائی ہندسہ اور طبعیاتی ریاضی کا پورا دار و مدار تفرقی سر پر ہے۔

۴۲ :- مخنی کا ڈھال 'ماس' اور 'عادی' مساواتیں وغیرہ :-



شکل میں نقطہ ن (لا، ما) پر منحنی کا مماس ن ت دکھایا گیا ہے۔ یہ لا محور سے نقطہ ت پر ملتا ہے اور لا محور کی مثبت سمت سے زاویہ سہ بناتا ہے۔ ہمیں معلوم ہے کہ مس سہ =  $(\frac{فرما}{فرلا})$  جبکہ  $\frac{فرما}{فرلا}$  میں نقطہ ن کے محدود درجہ کر دیے گئے ہیں۔ اس امر کو علامتوں میں  $(\frac{فرما}{فرلا})$  یا  $(\frac{فرلا}{لا، ما})$  یا  $(\frac{فرلا}{لا، ما})$  سے تعبیر کرتے ہیں اور مس سہ یا  $(\frac{فرلا}{لا، ما})$  کو نقطہ ن پر منحنی کا ڈھال کہتے ہیں۔ تجلیلی ہندسہ سے طالب علم کو معلوم ہے کہ مماس ن ت کی مساوات ہوگی

$$(ما - لا) = مس سہ \times (لا - لا)$$

$$= (\frac{فرما}{فرلا}) \times (لا - لا)$$

اسی طرح عماد ن ع کی مساوات ہوگی  $(ما - لا) = - مس سہ \times (لا - لا)$

$$= - \frac{1}{(\frac{فرلا}{لا، ما})} \times (لا - لا)$$

یعنی  $(ما - لا) = (\frac{فرلا}{لا، ما}) + (لا - لا) =$

اب نقاط اور ع کے محدود دریافت کرنے کے لیے مماس اور عماد کی مساواتوں میں ما = رکھو تو ت کے محدود ہونگے  $(لا - (\frac{فرلا}{لا، ما}))$  اور ع کے محدود ہونگے

$$[لا - ما, (\frac{فرما}{فرلا})]$$

ن ت کو مماس کا طول اور ن ع کو عماد کا طول کہتے ہیں۔ شکل سے ظاہر ہے کہ

$$ماس کا طول ن ت = ن م \times ق م سہ = ما ق م سہ$$

$$\sqrt{1 + (\frac{فرلا}{فرما})^2} \times ما = \sqrt{1 + (\frac{فرلا}{فرما})^2} \times ما =$$

اور عماد کا طول ن ع = ن م قسطہ = مار قسطہ = مار  $\times$   $\sqrt{1 + \left(\frac{فرلا}{فرلا}\right)^2}$   
ماس اور عماد کے لا محور پر طولوں کو بالترتیب زیر ماس اور زیر عماد کہتے ہیں۔

پس زیر ماس م ت = ن م  $\times$  م م سہ = مار م سہ =  $\left(\frac{فرلا}{فرلا}\right)$  مار =  $\left(\frac{فرلا}{فرلا}\right)$

اور زیر عماد م ع = ن م  $\times$  م سہ = مار سہ =  $\left(\frac{فرلا}{فرلا}\right)$  مار

مثال (۱)۔ مکانی ما = لا ۲ - لا ۱ کے ماس کا ڈھال مبداء اور لا =  $\frac{۳}{۴}$  والے نقطوں پر دریافت کرو۔ نیز بتاؤ کن نقطوں پر ماس لا محور سے ۴۵° کا زاویہ بناتا ہے اور کہاں لا محور کے متوازی ہے۔

$$ما = لا ۲ - لا ۱$$

$$\text{تفریق کرنے سے } \frac{فرلا}{فرلا} = ۲ - لا ۲$$

اس لیے مبداء پر ڈھال = ۲ اور لا =  $\frac{۳}{۴}$  والے نقطے پر ڈھال = ۱ -  
نیز اگر ماس ۴۵° کا زاویہ بناتا ہے تو ڈھال = س ۴۵° = ۱

$$\therefore ۱ = ۲ - لا ۲ \therefore لا = \frac{۱}{۲}$$

$\therefore$  نقطہ  $\left(\frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۴}\right)$  پر ماس لا محور سے ۴۵° کا زاویہ بنائے گا۔

اور لا محور سے متوازی ہونے کے لیے ڈھال = س ۰ = ۰  $\therefore لا ۲ - لا ۱ = لا ۱$   
اور نقطہ (۱، ۱) پر منحنی کا ماس لا محور کے متوازی ہوگا۔

مثال (۲)۔ مکانی ما = لا ۴ - لا ۵ کے کسی نقطہ پر منحنی کا ڈھال اور ماس عماد، زیر ماس اور زیر عماد کے طول دریافت کرو۔

$$\text{تفریق کرنے سے } ما ۲ = \frac{فرلا}{فرلا} = ۴ \therefore \frac{فرلا}{فرلا} = \frac{۲}{۴}$$

اس لیے کسی نقطہ پر ڈھال  $\frac{۲}{۴}$  ہے اور زاویہ ماس س  $\left(\frac{۱}{۲}\right)$



$$\sqrt{\frac{1}{n} + 1} \times 1 = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{n}\right)} \times 1 = \text{ماس کا طول}$$

$$\sqrt{1 + \frac{1}{n}} \times 1 = \sqrt{\frac{n}{n} + 1} \times 1 = \text{اور عداد کا طول}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 1 = \text{نیز جس کا طول}$$

$$2 = \frac{2}{1} \times 1 = \text{زیر عداد کا طول}$$

مثال (۲)۔ وہ منحنی دریافت کرو جس کے زیر ماس کا طول فصلہ کے متناسب ہو۔

منحنی کی تفرقی مساوات حاصل کرنے کے لیے ماس  $\frac{1}{x}$  کو  $\infty$  ل

فرض کرو کہ ماس  $\frac{1}{x} = 1$  جہاں ل دیا ہوا مستقل ہے۔

تو  $\int \frac{1}{x} = \int 1$  اور مکمل کرنے سے

لوگ ل = لوگ ماس + مستقل

∴ ج ماس = ج ماس<sup>۱</sup> جہاں ج اختیاری مستقل ہے۔ بالخصوص اگر لوگ قیمت (۱) ہو تو یہ منحنی قائم زائد ہوگا۔

مثال (۳)۔ وہ منحنی دریافت کرو جس کے زیر عداد کا طول و کے مساوی ہے اور جو مبداء میں سے گزرتا ہے۔ ایسے منحنیوں کی تفرقی مساوات ہوگی۔

$$1 = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{n}\right)} \times 1$$

$$\frac{1}{n} = \left(\frac{1}{n}\right) + 1 \quad \therefore$$

$$\sqrt{\frac{1}{n} - 1} \pm = \frac{1}{n} \quad \therefore$$

$$\int \pm = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{n}}} \int \frac{1}{n} \quad \therefore$$

اور تکمل کرنے سے  $\pm \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$  جہاں ج اختیاری مستقل ہے۔  
 اب مربع لینے سے  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$  (ج + ج)  $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$  جو دائروں کو تعبیر کرتا ہے۔  
 اب ج کی قیمت دریافت کرنے کے لیے ہمیں معلوم ہے کہ دائرہ مبارکین سے گزرتا ہے۔

اس لیے  $0 + (-ج + ج) = \frac{1}{2}$  یعنی ج  $\pm \frac{1}{2}$   
 یعنی  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$  مطلوبہ دائرہ ہے۔

## مشقی سوالات ۲۱

(۱) منحنی  $1 = 2 - 3\lambda + 4\mu + 1$  کے نقاط  $\lambda = 1 - \frac{1}{2}$  اور  $\mu = \frac{1}{2}$  پر منحنی کا ڈھال اور مماس کا لا محور سے زاویہ سمہ دریافت کرو۔  
 (۲) منحنی  $(1 + \lambda^2) - \mu = 0$  کا ڈھال اور مماس کی قیمت مبارک پر دریافت کرو۔

(۳) بتاؤ کہ منحنی  $1 - 2\lambda = 0$  کے کس نقطہ پر ڈھال ۳ ہے نیز کس نقطہ پر سمہ  $90^\circ$  ہے۔  
 (۴) بتاؤ کہ کن نقطوں پر منحنی  $1 + 3\lambda = 2 - 9\lambda + 5\mu$  کا مماس محور  $\lambda$  کے متوازی ہے۔

(۵) ذیل کے منحنیوں کے دئے ہوئے نقطوں پر مماس اور عماد کی سلاطین اور زیر مماس اور زیر عماد کا طول محسوب کرو۔

(ا)  $1 + 3\lambda = 2$  کے نقطہ  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$  پر

(ب)  $1 + \lambda = 2$  کے نقطہ (رجم طہ رجب طہ) پر

(ج)  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$  کے نقطہ  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  پر

(۶)  $1 = 2 - 3\lambda + 4\mu + 1$  کے نقطہ  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  پر کے مماس عماد اور محور  $\lambda$  سے جو مثلث

بنتا ہے اس کا رقبہ دریافت کرو۔

(۷)  $۱ = ۱$  کے نقطہ (۲، ۲) پر کے ماس اور حوالے کے محوروں سے جو مثلث بنتا ہے اس کا رقبہ دریافت کرو۔

(۸)  $۱ = ۱$  کے  $۵ + ۱$  کے ان نقاط پر کے ماسوں کا نقطہ تقاطع دریافت کرو جن کے فیصلے بالترتیب ۲ اور ۳ ہیں۔

(۹)  $۱ = ۱$  کے  $۳ + ۱$  کے ان نقاط پر کے ماسوں کا درمیانی زاویہ معلوم کرو جن کے فیصلے بالترتیب ۱ اور ۳ ہیں۔

(۱۰)  $۱ = ۱$  کے  $۲ + ۱$  کے کتنے ماس خط  $۱ - ۱ = ۲۸$  کے متوازی ہیں، ان کی مساواتیں معلوم کرو۔

(۱۱)  $۱ + ۱ + ۱ = ۳$  کے افقی اور انتصابی ماسوں کے نقاط تماس معلوم کرو۔

(۱۲)  $۳ - ۱ = ۲$  کے ان ماسوں کی مساواتیں معلوم کرو جو  $۲ + ۱ = ۳$  پر علی التوابع ہیں۔

(۱۳) ناقص  $\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} = ۱$  پر وہ نقطہ معلوم کرو جس کا ماس محورِ اعظم اور محورِ اصغر کے سروں کو ملانے والے خط کے متوازی ہے۔

(۱۴)  $۲ = ۱$  میں ثابت کرو کہ زیرِ عادی تنصیف راس پر ہوتی ہے اور زیرِ عادی کا طول  $۱$  ہے۔

(۱۵) وہ منحنیات دریافت کرو جن کا (۱) زیرِ ماس کا طول مستقل ہے۔

(ب) زیرِ عادی کا طول مستقل ہے۔

(ج) ماس کا طول مستقل ہوتا ہے۔

(د) عادی کا طول مستقل ہوتا ہے۔

(۱۶) ثابت کرو کہ  $۲ = ۱$  - منحنی  $۱ = ۲ + ۱ - ۳ + ۱$

کو دو علیحدہ علیحدہ نقاط پر مس کرتا ہے۔

(۱۷) ثابت کرو کہ  $۳ = ۱$  - منحنی  $۱ = ۳ - ۱ + ۱$  کا ماس ہے۔

(۱۸) ثابت کرو کہ خط  $\frac{y}{x} = 2$  منحنی  $(\frac{y}{x})^2 + (\frac{y}{x}) = 2$  کو ن کی ہر قیمت کے لیے نقطہ (۱، ۲) پر مس کرتا ہے۔

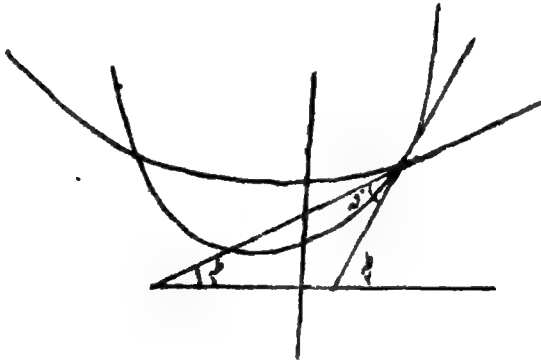
(۱۹) منحنی  $y = x^2$  جب  $\frac{y}{x}$  میں ثابت کرو کہ زیر ماس = ماس  $\frac{y}{x}$

اور زیر عماد  $\frac{y}{x}$  جب  $\frac{y}{x}$  اور عماد کا طول  $y$  جب  $\frac{y}{x}$   $\sqrt{\frac{y}{x} + 1}$   $\times \frac{y}{x}$

(۲۰) بتاؤ کہ منحنی  $y = x^2$  اور  $y = 12 + 5x - 15x^2$

ایک دوسرے کو کن نقطوں پر کاٹتے ہیں اور ان نقطوں پر دونوں منحنیوں کے ماسوں میں کیا زاویہ ہے۔

منحنی  $y = x^2$  اور  $y = 12 + 5x - 15x^2$  میں سے  $y = 15x^2 - 5x + 12$  ساقط کر دو یعنی ایک مساوات سے ماسی قیمت نکال کر دوسری مساوات میں درج کر دو۔



$$15 - (12 + 5x - 15x^2) + 15x^2 = 3 - 5x$$

$$15 - 12 + 5x - 15x^2 + 15x^2 = 3 - 5x$$

$$0 = (1 - 5x)(3 + 5x) \therefore 0 = 3 - 5x$$

$$\therefore 3 = 5x$$

اس لیے نقاط تقاطع کے محدد ہیں (۱، ۱) اور (۳، ۳)

شکل میں دو منحنی دکھائے گئے ہیں۔ ان کے عاس بالترتیب لا محور سے زاویہ طم اور طم بناتے اور نقطہ تقاطع پر عاسوں کے درمیان زاویہ فہ ہے۔ ظاہر ہے کہ فہ = طم - طم

$$\therefore \text{مس فہ} = \text{مس (طم - طم)} = \frac{\text{مس طم} - \text{مس طم}}{1 + \text{مس طم} \text{مس طم}}$$

اب مس طم اور مس طم کی قیمتیں معلوم ہیں اور اس سے مس فہ کی قیمت نکل سکتی ہے۔ اس سوال میں پہلے منحنی کے لیے

$$\frac{\text{فہ}}{\text{طرلا}} = ۱۸ - ۵ \text{ اور نقاط تقاطع پر اس کی قیمت ہے } ۳ \text{ اور } ۲۹$$

دوسرے منحنی کے لئے

$$\frac{\text{فہ}}{\text{طرلا}} = ۱۶ - ۴ \text{ اور نقاط تقاطع پر اس کی قیمت ہے } ۱ \text{ اور } ۲۵$$

پس نقطہ (۱، ۱۱) پر عاسوں کے درمیان زاویہ فہ ہے

$$\text{مس فہ} = \frac{۳ - (۱ -)}{(۱ -) (۳) + 1} = \frac{۲ -}{۳ - 1} = ۲ +$$

اور نقطہ (۳، ۶۳) پر عاسوں کے درمیان زاویہ فہ ہے

$$\text{مس فہ} = \frac{(۲۹ -) - ۲۵ -}{(۲۵ -) (۲۹ -) + 1} = \frac{۴ +}{۴۲۶}$$

واضح رہے کہ عاسوں کے درمیان زاویہ فہ یا ۱۸۰ - فہ لیا جاسکتا ہے۔

اس لیے علامت کا تعین بغیر ترسیم کھینچے نہیں ہو سکتا۔

(۲۱) ذیل کے منحنیوں کے تقاطع کے زاویے محبوب کرو:-

$$(۱) \quad ۱ = ۱ + ۲ - ۱ \text{ اور } ۱ = ۱ + ۲ - ۱$$

$$(۲) \quad ۱ = ۱ + ۲ - ۱ \text{ اور } ۱ = ۱ + ۲ - ۱$$

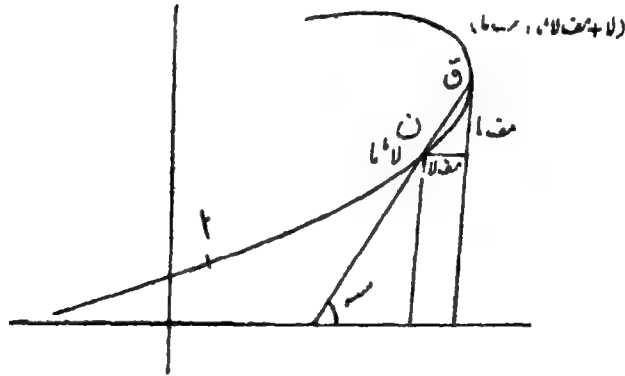
$$(۳) \quad ۱ = ۱ + ۲ - ۱ \text{ اور } ۱ = ۱ + ۲ - ۱$$

$$(۲۲) \quad \text{ثابت کرو کہ } ۱ = ۱ + ۲ - ۱ \text{ اور } ۱ = ۱ + ۲ - ۱ \text{ علی التوائم}$$

قطع کرتے ہیں۔  
(۲۳) ثابت کرو کہ  $لا + ما = ۸ لا اور ما = \frac{لا}{۲-۱}$  ایک دوسرے کو  
مبادی پر علی القوائم قطع کرتے ہیں اور دوسرے نقطوں پر ۵ م کے زاویہ پر قطع  
کرتے ہیں۔

۴۲۵:- منحنی کے قوس کا طول :- ایک سیدھے خط کے

طول کے مفہوم سے طالب علم خوب واقف ہے۔ لیکن منحنی کے قوس کا طول  
اس قدر آسان نہیں ہے۔ اس کی ایک تعریف یوں ہو سکتی ہے کہ منحنی کے  
قوس کو چھوٹے چھوٹے قوسوں میں تقسیم کر دیا جائے اور ان قوسوں کے وتروں  
کو ناپ لیا جائے۔ تب وتروں کے طولوں کے مجموعے کی انتہا کو جب چھوٹے  
قوسوں کی تعداد بہت بڑھا دی جائے قوس کا طول کہیں گے۔ لیکن اس  
تعریف میں چند مشکلات ہیں جن کا اس ابتدائی کتاب میں ذکر نہیں ہو سکتا۔  
شکل سے واضح ہے کہ (وترن ق) = (مف لا) + (مف ما)



اب کسی نقطہ ۱ سے شروع کر کے ان کے قوس کا طول س سے  
تعبیر ہو تو قوس ن ق کا طول مف س سے تعبیر ہو گا۔  
(مف س) × (مف ن ق) = (مف لا) + (مف ما)

$$\text{یعنی } \left( \frac{\text{مف س}}{\text{مف لا}} \right)^2 \times \left( \frac{\text{وترن ق}}{\text{مف س}} \right)^2 = 1 + \left( \frac{\text{مف با}}{\text{مف لا}} \right)^2$$

اب مف لا بے حد چھوٹا کر دیا جائے اور مذکورہ بالا تعریف کے مطابق قوس کا طول وجود رکھتا ہو یعنی انتہا میں جبکہ مف لا  $\rightarrow 0$  وتر اور قوس کا طول مساوی ہو تو

وترن ق کی انتہا ایک ہوگی

$$\text{اور } \left( \frac{\text{فرس}}{\text{فر لا}} \right)^2 = 1 + \left( \frac{\text{فر با}}{\text{فر لا}} \right)^2 = 1 + \text{مس}^2 \text{ سہ} = \text{قط}^2 \text{ سہ}$$

$$\text{اس لیے جم سہ} = \frac{\text{فر لا}}{\text{فرس}} \text{ اور جب سہ} = \frac{\text{فر با}}{\text{فرس}}$$

مثال (۱) سخنی ۳ = لا + ۲ کے نقطہ (۲، ۲) پر  $\frac{\text{فر لا}}{\text{فرس}}$  اور  $\frac{\text{فر با}}{\text{فرس}}$  کی قیمت معلوم کرو۔

$$\text{اب } \left( \frac{\text{فرس}}{\text{فر لا}} \right)^2 = 1 + \left( \frac{\text{لا}}{\text{فر لا}} \right)^2 = 1 + \left( \frac{۲}{۳} \right)^2 = 1 + \frac{۴}{۹} = \frac{۱۳}{۹} \therefore \frac{\text{فرس}}{\text{فر لا}} = \frac{۵}{۳}$$

$$\text{اور } \left( \frac{\text{فر با}}{\text{فر لا}} \right)^2 = 1 + \left( \frac{\text{فر با}}{\text{فر لا}} \right)^2 = 1 + \left( \frac{۲}{۳} \right)^2 = 1 + \frac{۴}{۹} = \frac{۱۳}{۹} \therefore \frac{\text{فر با}}{\text{فر لا}} = \frac{۵}{۳}$$

$$(۲) \text{ لا} = ۲ \text{ لایں فرس اور فرس کی قیمت معلوم کرو۔}$$

$$(۳) \text{ سخنی لا}^2 + ۲ \text{ لا} + ۱ = \text{ب با}^2 \text{ میں ثابت کرو کہ}$$

$$\frac{\text{فرس}}{\text{فر لا}} = \frac{(\text{لا}^2 - ۱) + (\text{لا} + ۱)(\text{لا} + ۱)}{\text{لا} + ۱}$$

$$(۴) \text{ لا}^2 + ۳ \text{ لا} + ۳ = \text{لا} + ۱ \text{ لایں فرس کی قیمت معلوم کرو۔}$$

$$(۵) \text{ لا}^2 = ۲ \text{ لایں اس قوس کا طول معلوم کرو جو رأس اور}$$

وتر خاص کے سروں کے درمیان ہے۔

$$(۶) \text{ لا}^2 = \text{لا} \text{ میں لا} = ۱ \text{ اور لا} = \frac{۵}{۴} \text{ کے درمیان قوس کا طول}$$

محسوب کرو۔

$$(۷) \text{ لا}^2 = \text{لا} \text{ لایں بداء اور (۳، ۴) کے درمیان قوس کا طول معلوم کرو۔}$$

۳۳۔ منحنی کی تبدیل مساوات :- بالعموم منحنی کی مساوات  $y = f(x)$  کی شکل میں دی جاتی ہے۔ اس میں یہ سہولت ہے کہ لا کی قیمت کے جواب میں ما کی قیمت بہ آسانی نکل سکتی ہے۔ لیکن اگر منحنی تصنیفی تفصل سے بیان ہو یعنی  $y = f(x)$  تو لا کی قیمت کے جواب میں ما کی قیمت نکالنے کے لیے ایک مساوات کو حل کرنا پڑیگا۔ اس قسم کی بعض مساواتوں میں متغیروں کو ایک دیگر تبدیل کی رقوم میں بیان کیا جاسکتا ہے۔ مثلاً  $y = f(x) + z$  ایک دائرہ کی مساوات ہے اور اس کے محدود لا کو  $y = f(x) + z$  جب ط سے ط کی رقوم میں بیان کر دیا ہے۔ اس متغیر ط کو تبدیل کہتے ہیں اور لا اور ما کی قیمتیں تبدیل کی رقوم میں بیان ہیں۔ اب ط کی کوئی بھی قیمت کے جواب میں لا اور ما کی قیمت بہ آسانی حاصل ہو سکتی ہے۔ اسی طرح ناقص  $y = f(x) + z$  کی تبدیل مساوات ہے  $y = f(x) + z$  جب ط - نیز مکانی  $y = f(x) + z$  لا کی تبدیل مساوات ہے  $y = f(x) + z$  جب ط - وغیرہ وغیرہ۔ عام صورت میں تبدیل مساوات ہوگی  $y = f(x) + z$   $y = f(x) + z$  اور ان میں سے تبدیل ط کو سا قفط کرنے سے منحنی کی تصنیفی کارٹیزی مساوات حاصل ہو جائیگی۔

تبدیل مساوات سے منحنی کا ڈھال نکالنے کے لیے

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{1} = \frac{f'(x)}{1} \times \frac{1}{1} = \frac{f'(x)}{1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{1} = \frac{f'(x)}{1}$$

اب اگر  $y = f(x) + z$  تو لازماً  $y = f(x) + z$  ہوگا

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{1} = \frac{f'(x)}{1} \times \frac{1}{1} = \frac{f'(x)}{1}$$

اس لیے  $\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{1} = \frac{f'(x)}{1} \times \frac{1}{1} = \frac{f'(x)}{1}$



بعض سوالات میں قوس کے طول س کو تبدیل لینے سے بہت سہولت ہوتی ہے

$$\text{نیز } \left(\frac{\text{فرس}}{\text{فرلا}}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\text{فربا}}{\text{فرلا}}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\left(\frac{\text{فربا}}{\text{فرط}}\right)^2}{\left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرط}}\right)^2}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{\text{فرس}}{\text{فرلا}}\right)^2 \left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرط}}\right)^2 = \left(\frac{\text{فربا}}{\text{فرط}}\right)^2 + \left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرط}}\right)^2$$

$$\therefore \left(\frac{\text{فرس}}{\text{فرط}}\right)^2 = \left(\frac{\text{فربا}}{\text{فرط}}\right)^2 + \left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرط}}\right)^2$$

مثال (۱) خط تدویر لا = ل (ط + جب ط) کے ماس کا ڈھال

دریافت کرو نیز قوس کے جملے حاصل کرو۔ اس منحنی کی کارٹینری مساوات بہت مشکل ہے۔

$$\text{اب } \frac{\text{فرلا}}{\text{فرط}} = ل (۱ + \text{جم ط}) \quad ' \quad \frac{\text{فربا}}{\text{فرط}} = ل \text{ جب ط}$$

$$\therefore \frac{\text{فرلا}}{\text{فرط}} = \frac{\text{جب ط}}{۱ + \text{جم ط}} = \frac{۲ \text{ جب } \frac{\text{جم ط}}{۲}}{\frac{۲}{۱} + \text{جم } \frac{\text{جم ط}}{۲}} = \text{مس } \frac{\text{ط}}{۲}$$

$$\therefore \left(\frac{\text{فرس}}{\text{فرط}}\right)^2 = ل^2 (۱ + \text{جم ط})^2 + ل^2 \text{ جب ط}^2$$

$$= ل^2 + ل^2 ۲ \text{ جم ط} + ل^2 (۱ + \text{جم ط})^2$$

$$= ل^2 ۲ \text{ جم } \frac{\text{جم ط}}{۲} =$$

$$\therefore \frac{\text{فرس}}{\text{فرط}} = ۲ ل \text{ جم } \frac{\text{ط}}{۲}$$

$$\therefore \text{س} = ل ۲ ل \text{ جم } \frac{\text{ط}}{۲} \text{ فرط} = مر + ۲ ل \text{ جب } \frac{\text{ط}}{۲}$$

مثال (۲) ذیل کے منحنیوں میں نقاط مطلوبہ پر ماس اور عماد کی

مساواتیں اور زیر ماس اور زیر عماد کے طول محسوب کرو۔

$$(۱) لا = ت'، م = ت'، نقطہ ت = ۱$$

$$(ب) لا = ۲، ت' = ۱، ت' = نقطہ ت = صفر$$

(۳) لا = ۴، ۱ = ۳، ۲ = ۱ جب ۳ ط کے کسی نقطہ (لا، ۱) پر حاس عا د  
زیر حاس اور زیر عا د کے طول معلوم کرو۔

(۴) لا = ۱، ۱ = ۳، ۲ = ۱ جب ۳ ط کے نقطہ ط = ۳ پر حاس  
اور عا د کی مساواتیں اور زیر حاس اور زیر عا د کے طول معلوم کرو۔

(۵) لا = ۱، ۱ = ۳، ۲ = ۱ جب ۳ ط کے (۱-۱-۱) کے اس قوس کا  
طول معلوم کرو جو ط = صفر اور ط = ۲ کے درمیان ہے۔

(۶) لا = ۱، ۱ = ۳، ۲ = ۱ جب ۳ ط میں ط = ۰ سے ط = ۲ تک  
قوس کا طول محسوب کرو۔

(۷) ذیل کے منحنیوں کے لیے  $\frac{فرس}{فرت}$  جب ۳ اور ۴ سے کوت کی روم  
میں بیان کرو۔

$$(۱) لا = ت + ۱، م = ت$$

$$(ب) لا = ت، م = ت$$

تہ ۴ :- قطبی محدودوں میں منحنی کا ڈھال :- فرض کرو کہ

قطبی محدودوں کا قطب م اور ابتدائی خط م لا ہے اور کسی منحنی ان ق ب  
پر متصل نقطے ن اور ق ہیں جن کے محدود (ر، ط) اور (ر، م) ط + م (ط) ہیں  
و ترقی ن کی انتہائی شکل جبکہ ق منحنی پر حرکت کرتے ہوئے نقطہ ن پر  
منطبق ہو جائے ماس ن ت ہوگا۔ فرض کرو کہ زاویہ ن ت لا = ۳  
اور زاویہ م ن ت = ۴ کارٹیزی محدودوں میں زاویہ ۳ بہت اہم  
تھا لیکن قطبی محدودوں میں حاس اور سمتی نیم قطر کا درمیانی زاویہ ۴  
اکثر ضابطوں میں استعمال ہوگا۔ یہ زاویہ ۴ دراصل زاویہ م کی انتہائی



$$\therefore \left( \frac{\text{وتر ن ق}}{\text{قوس ن ق}} \right)^2 \left( \frac{\text{قوس ن ق}}{\text{مف ط}} \right)^2 = \left( \frac{\text{رجب مف ط}}{\text{مف ط}} \right)^2 + \left( \frac{\text{رجب مف ر - رجم مف ط}}{\text{مف ط}} \right)^2$$

اب جیسا کہ دفعہ ۴۲۵ میں کارٹینری محدّوں کے لیے فرض کیا گیا ہے کہ منحنی کے قوس کا طول ناپا جاسکتا ہے اور انتہا میں قوس اور وتر کی نسبت ایک کے مساوی لی جاسکتی ہے تو نیز فرض کرو کہ منحنی کے کسی نقطہ ۱ سے ن تا ک قوس کا طول س ہے اور قوس ن ق کا طول مف س ہے۔

$$\text{ن س} \left( \frac{\text{وتر ن ق}}{\text{قوس ن ق}} \right)^2 \left( \frac{\text{قوس ن ق}}{\text{مف ط}} \right)^2 = \text{ن س} \left( \frac{\text{رجب مف ط}}{\text{مف ط}} \right)^2 + \text{ن س} \left( \frac{\text{رجب مف ر - رجم مف ط}}{\text{مف ط}} \right)^2$$

$$\therefore 1 \times \left( \frac{\text{فرس}}{\text{فرط}} \right)^2 = \left( \frac{\text{فر}}{\text{فرط}} \right)^2 + \left( \frac{\text{فر}}{\text{فرط}} \right)^2$$

$$\therefore \left( \frac{\text{فرس}}{\text{فرط}} \right)^2 = \left( \frac{\text{فر}}{\text{فرط}} \right)^2 + \left( \frac{\text{فر}}{\text{فرط}} \right)^2$$

$$\therefore \left( \frac{\text{فرس}}{\text{فرط}} \right)^2 = \left( \frac{\text{فر}}{\text{فرط}} \right)^2 + \left( \frac{\text{فر}}{\text{فرط}} \right)^2$$

$$\therefore \left( \frac{\text{فرس}}{\text{فرط}} \right)^2 = \left( \frac{\text{فر}}{\text{فرط}} \right)^2 + \left( \frac{\text{فر}}{\text{فرط}} \right)^2$$

$$= 1 + \text{مس}^2 = \text{قط}^2$$

$$\therefore \text{جم ف} = \frac{\text{فر}}{\text{فرس}} \quad \text{اور جب ف} = \text{مس فجم ف} = \text{ر} \frac{\text{فرط}}{\text{فرس}}$$

مثال (۱)  $\text{ر} = \text{ر} (1 - \text{جم ط})$  کے نقطہ ط =  $\frac{\pi}{4}$  پر منحنی کا دھال اور محاس اور نیم قطر کا درمیانی زاویہ دریافت کرو۔  
اگر نیم قطر اور محاس کے درمیان زاویہ ف ہو تو

$$\text{مس ف} = \text{ر} \frac{\text{فرط}}{\text{فر}} = \text{ر} (1 - \text{جم ط}) \times \frac{1}{\text{رجب ط}} = \frac{1 - \text{جم ط}}{\text{رجب ط}} = \frac{1 - \text{جم ط}}{\text{رجب ط}} = \frac{1 - \text{جم ط}}{\text{رجب ط}}$$

$$\therefore \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} = \text{ف}$$

$$\text{اور مس س} = \text{مس (ط + ف)} = \text{مس} \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

مثال (۲) منحنی  $r = ۴$  جب طہ + ۳ جم طہ کے لیے فرس معلوم کرو۔

اب  $\frac{\text{فرط}}{\text{فرط}} = \text{م جم طه} - \text{م جب طه}$

$$2 = \left( \frac{\text{فرس}}{\text{فرطه}} \right) + 2 = \left( \frac{\text{فرس}}{\text{فرطه}} \right) \therefore$$



$$\text{اور قطبی زیر عماس ہر س} = \text{ر مس ذ} = \text{ر} \frac{\text{فرط}}{\text{فرز}}$$

$$\text{اور قطبی زیر عماد مرد} = \text{ر مم ذ} = \text{ر} \frac{\text{فرز}}{\text{فرط}}$$

اس ترقیم کے مطابق ن س کو عماس کا طول اور ن د کو عماد کا طول کہہ سکتے ہیں۔

$$\text{ماس کا طول ن س} = \text{ر قط ذ} = \sqrt{1 + \left(\frac{\text{فرط}}{\text{فرز}}\right)^2} \times \text{ر} = \text{ر} \frac{\text{فرس}}{\text{فرز}}$$

$$\text{اور عماد کا طول ن د} = \text{ر قم ذ} = \sqrt{1 + \left(\frac{\text{فرز}}{\text{فرط}}\right)^2} \times \text{ر} = \frac{\text{فرس}}{\text{فرط}}$$

مثال (۱)  $\text{ر}^2 = \text{ا}^2$  جم  $\text{ط}^2$  میں قطبی زیر عماس، قطبی زیر عماد اور مبداء سے ماس پر عمود کا طول محسوب کرو۔

$$\text{تفریق کرنے سے } \text{ر} \frac{\text{فرز}}{\text{فرط}} = - \text{ا}^2 \text{ جب } \text{ط}^2$$

$$\therefore \text{قطبی زیر عماس} = \text{ر} \frac{\text{فرط}}{\text{فرز}} = \text{ر}^2 \times \frac{\text{ا}^2 \text{ جب } \text{ط}^2}{- \text{ا}^2 \text{ جب } \text{ط}^2} = \frac{\text{ر}^2 - (\text{ا}^2 \text{ جب } \text{ط}^2)^2}{\text{ا}^2 \text{ جب } \text{ط}^2}$$

$$= - \text{ا}^2 \text{ جم } \text{ط}^2 \sqrt{\text{ا}^2 \text{ جب } \text{ط}^2}$$

$$\text{قطبی زیر عماد } \frac{\text{فرز}}{\text{فرط}} = - \frac{\text{ا}^2 \text{ جب } \text{ط}^2}{\text{ا}^2 \text{ جم } \text{ط}^2} = - \text{ا}^2 \text{ جب } \text{ط}^2 \sqrt{\text{ا}^2 \text{ جب } \text{ط}^2}$$

$$\text{ماس پر عمود کا طول ع ہوتو } \frac{1}{\text{ا}^2} \text{ قط } \text{ط}^2 + \frac{1}{\text{ا}^2 \text{ جم } \text{ط}^2} = \frac{1}{\text{ا}^2} (\text{ط}^2 \text{ مس } \text{ا}^2 \text{ قط } \text{ط}^2)$$

$$= \frac{1}{\text{ا}^2} \text{ قط } \text{ط}^2$$

$$\therefore \text{ع} = \text{ا}^2 \text{ جم } \text{ط}^2$$

(۲) ذیل کے منحنیوں میں قطبی عماس، قطبی عماد، قطبی زیر عماس، قطبی زیر عماد

اور ماس پر مبداء سے عمود کا طول محسوب کرو۔

$$(۱) ر = ط$$

$$(ب) ر = ط$$

$$(ج) رط = ط$$

(۳) ثابت کرو کہ منحنیات  $ر = ط (۱ + جم ط)$  اور  $ر = ط (۱ - جم ط)$  ایک دوسرے کو علی القوائم کاٹتے ہیں۔

(۴) منحنیات  $رجم ط = ط$  اور  $ر جب ط = ط$  میں زاویہ تقاطع دریافت کرو۔

(۵) منحنیات  $ر جب ط = ط$  اور  $ر = ط$  میں زاویہ تقاطع دریافت کرو۔

## ۴۶۔ الجبر میں تفرقی سر کا استعمال :-

مساوات  $ف (لا) = ل لان + ل لان + ... + ل لان = ل$  کو ن دیں  
رتبہ کی جبریہ مساوات کہتے ہیں۔ اگر ان مثبت صحیح عدد ہو اور  $ل، ل، ل، ...$  حقیقی مقادیر ہوں تو اس مساوات کی ٹھیک ن اصلیں وجود رکھتی ہیں۔ لیکن ہر سوال میں ان اصولوں کی قیمت نہیں نکالی جاسکتی۔ پہلے رتبہ کی مساوات سے چوتھے رتبہ کی عام مساوات کو ہر صورت میں حل کیا جاسکتا ہے اس سے اعلیٰ رتبہ کی مساوات کو عام صورت میں حل نہیں کیا جاسکتا بلکہ ایک بڑے ریاضی دان نے ثابت کر دیا ہے کہ اس کا امکان بھی نہیں۔ البتہ اگر کسی مساوات کی کوئی اصل مکرر اصل ہو یعنی دو یا زیادہ اصلیں مساوی ہوں تو ان مساوی اصلوں کو یہ آسانی حاصل کیا جاسکتا ہے۔

اب اگر  $لا = ع$  مساوات  $ف (لا) = ل$  کی رتبہ کی اصل ہو تو مسئلہ باقی سے ظاہر ہے کہ

صفر =  $ف (لا) = (لا - ع) ف (لا) + ف (لا) = ع ف (لا)$  جہاں  $ف (لا) = صفر$  اس کو تفرق کرنے سے

$$ف (لا) = ر (لا - ع) ف (لا) + (لا - ع) ف (لا) = ع ف (لا)$$





اس لیے (لا-۲) جلات ف (لا) اور ف (لا) کا عاوا اعظم ہے پس (لا-۲)<sup>۲</sup> جلد ف (لا) کا جزو ضربی ہے۔

ف (لا) = لا<sup>۲</sup> - لا<sup>۳</sup> - لا<sup>۴</sup> + لا<sup>۵</sup> + لا<sup>۶</sup> + لا<sup>۷</sup> + لا<sup>۸</sup> = (لا-۲)<sup>۲</sup> ف (لا)  
ف (لا) کی قیمت تقسیم سے نکالی جاسکتی ہے۔

$$\frac{لا^۲ - لا^۳ - لا^۴ + لا^۵ + لا^۶ + لا^۷ + لا^۸}{لا^۲ + لا^۳ + لا^۴ + لا^۵ + لا^۶ + لا^۷ + لا^۸}$$

$$\frac{لا^۲ - لا^۳ - لا^۴ + لا^۵ + لا^۶ + لا^۷ + لا^۸}{لا^۲ + لا^۳ + لا^۴ + لا^۵ + لا^۶ + لا^۷ + لا^۸}$$

$$\frac{لا^۲ - لا^۳ - لا^۴ + لا^۵ + لا^۶ + لا^۷ + لا^۸}{لا^۲ + لا^۳ + لا^۴ + لا^۵ + لا^۶ + لا^۷ + لا^۸}$$

$$\frac{لا^۲ - لا^۳ - لا^۴ + لا^۵ + لا^۶ + لا^۷ + لا^۸}{لا^۲ + لا^۳ + لا^۴ + لا^۵ + لا^۶ + لا^۷ + لا^۸}$$

$$\frac{لا^۲ - لا^۳ - لا^۴ + لا^۵ + لا^۶ + لا^۷ + لا^۸}{لا^۲ + لا^۳ + لا^۴ + لا^۵ + لا^۶ + لا^۷ + لا^۸}$$

x

$$\therefore \text{ف (لا)} = لا^۲ + لا^۳ + لا^۴ + لا^۵ + لا^۶ + لا^۷ + لا^۸$$

$$\text{اور ف (لا)} = (لا-۲)^۲ (لا^۲ + لا^۳ + لا^۴ + لا^۵ + لا^۶ + لا^۷ + لا^۸)$$

$$\therefore \text{مساوات کی اصلیں ہیں } \frac{لا^۲ \pm لا^۳}{۲}$$

حل کرو

$$(۲) لا^۲ + لا^۳ - لا^۴ - لا^۵ = ۰$$

$$(۳) لا^۲ - لا^۳ + لا^۴ + لا^۵ = ۰$$

$$(۴) لا^۲ - لا^۳ - لا^۴ + لا^۵ + لا^۶ + لا^۷ + لا^۸ = ۰$$

$$(۵) لا^۲ - لا^۳ - لا^۴ - لا^۵ = ۰$$

$$(۶) لا^۲ - لا^۳ - لا^۴ + لا^۵ + لا^۶ + لا^۷ + لا^۸ = ۰$$

$$(۷) لا^۲ + لا^۳ + لا^۴ + لا^۵ + لا^۶ + لا^۷ + لا^۸ = ۹۹$$

$$(۸) لا^۲ - لا^۳ - لا^۴ + لا^۵ + لا^۶ + لا^۷ + لا^۸ = ۱۰$$

(۹) اس طریقہ سے مساوات درجہ دوم کی مساوی اصلوں کے لیے شرط حاصل کرو۔

(۱۰) اس طریقہ سے مساوات  $لا + ب + لا + ج + لا + د =$  کی دو مساوی اصلوں کی شرط دریافت کرو۔

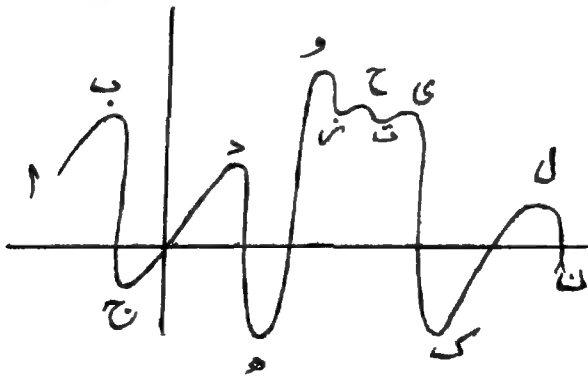
(۱۱) ثابت کرو کہ مساوات (۱)  $لا^۳ + لا^۲ + لا - ۳۸ = ۰$

اور (ب)  $لا^۳ - لا^۲ - لا + ۱۲ = ۰$

کی کوئی کمر اصلیں نہیں ہیں۔

۴، ۵ - اعظم اور اقل قیمتیں - دوسرے باب میں بتایا گیا ہے

کہ مسلسل تفاعل اپنی بڑی سے بڑی اور چھوٹی سے چھوٹی قیمتوں کے درمیان تمام قیمتیں اختیار کرتا ہے۔ ممکن ہے کہ تفاعل مسلسل بڑھتا چلا جائے یا مسلسل گھٹتا جائے یا کبھی بڑھے اور پھر گھٹے وغیرہ وغیرہ۔ مسلسل بڑھنے یا گھٹنے والے تفاعلوں کو ایک رنگی تفاعل کہتے ہیں۔ ایسے تفاعلوں میں بیش ترین قیمت اور کم ترین قیمت وقفے کے سروں پر ہوتی ہے۔ لیکن کہیں بڑھنے اور کہیں گھٹنے والے تفاعل کی صورت میں لازمی چند ایسے نقطے ہونگے جہاں بڑھنا ختم ہو کر گھٹنا عین شروع ہوگا یا گھٹنا ختم ہو کر بڑھنا عین شروع ہوگا۔ شکل میں ایک منحنی کی ترسیم ہے۔ اس ترسیم سے ظاہر ہے کہ نقاط ب، د، و، ح، ی اور ل پر بڑھنا ختم ہو کر گھٹنا شروع



ہوتا ہے اور نقاط ج، ه، ز، ت، ک پر گھٹنا ختم ہو کر بڑھنا عین شروع ہوتا ہے۔

ان نقاط کو منحنی کے ٹھہراؤ کے نقطے کہتے ہیں کیونکہ ان نقطوں پر معین بڑھنے یا گھٹنے سے رُک کر ٹھہر سا جاتا ہے۔ اب ٹھہراؤ کے نقطوں میں مزید اتنا ذکر کیا جاتا ہے۔ وہ ٹھہراؤ کے نقطے جہاں بڑھنا ختم ہو کر گھٹنا شروع ہوتا ہے جیسے جادو... اعظم نقطے کہلاتے ہیں اور گھٹنا ختم ہو کر بڑھنا عین شروع ہونے والے نقطے جیسے جادو... اقل نقطے واضح رہے کہ تفاعل کی اعظم قیمت لازماً بیش ترین قیمت نہیں ہے اور اسی طرح اقل قیمت کم ترین قیمت نہیں ہے۔ تحلیلی زبان میں اس بات کو یوں بیان کرتے ہیں کہ اگر  $\lambda = 0$  پر

ف (۱)  $< \text{ف} (1 \pm \epsilon)$  جہاں  $\epsilon$  کافی چھوٹی مثبت مقدار ہے  
تو  $\lambda = 0$  کو تفاعل ف (۱) کا اعظم نقطہ اور ف (۱) کو تفاعل کی اعظم قیمت کہتے ہیں۔

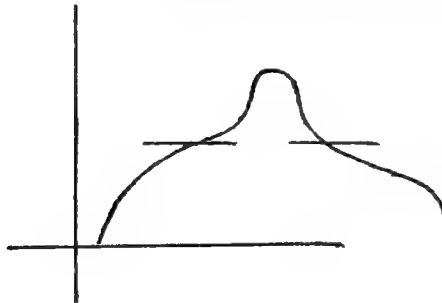
اسی طرح اگر  $\lambda = 0$  پر ف (ب)  $> \text{ف} (ب \pm \epsilon)$  جہاں  $\epsilon$  کافی چھوٹی مثبت مقدار ہے تو  $\lambda = 0$  کو تفاعل ف (ب) کا اقل نقطہ اور ف (ب) کو تفاعل کی اقل قیمت کہتے ہیں۔

اس تعریف سے ظاہر ہے کہ کسی نقطہ پر تفاعل کا اعظم یا اقل ہونا قرب کے نقطوں پر تفاعل کی قیمت پر منحصر ہے اور بیش ترین یا کم ترین قیمت کا انحصار پورے وقفے میں تفاعل کی قیمت پر ہے۔

اب ہمیں معلوم ہے کہ اگر ف (۱) متغیر  $\lambda$  کے ساتھ ساتھ بڑھ رہا ہو تو ف (۱) یعنی  $\frac{\text{ف}(1)}{\lambda}$  کی قیمت مثبت ہوگی اور اگر ف (۱) گھٹ رہا ہو

جبکہ  $\lambda$  بڑھ رہا ہے تو ف (۱) منفی ہوگا۔ ف (۱) کی اعظم قیمت اُس نقطہ پر ہوتی ہے جہاں ف (۱) بڑھنا ختم کر کے عین گھٹنا شروع کرے یعنی ف (۱) مثبت قیمت سے منفی قیمت میں عین تبدیل ہوتا ہے۔ یعنی ف (۱) صفر کے مساوی ہوتا ہے۔ اسی طرح ف (۱) کی اقل قیمت اس نقطہ پر ہوگی جہاں ف (۱) منفی قیمت سے مثبت قیمت میں عین تبدیل ہو۔ پس ظاہر ہے کہ تفاعل کی اعظم اور اقل قیمتیں ایسے نقطوں پر ہوتی ہیں جہاں ف (۱) صفر ہے۔

نیز ف (لا) = . والے نقطوں پر تفاعل کی ایک طرح قیمت ٹھہر سی جاتی ہے اور اس لیے ان تمام نقطوں کو ٹھہراؤ کے نقطے کہتے ہیں۔ ٹھہراؤ کے نقطے دریافت کرنے کے لیے تفاعل ف (لا) کو تفریق کر کے ف (لا) کو صفر رکھو اور اس سے لاکھ قیمتیں نکالو جو درکار ہیں۔ لیکن یہ ضروری نہیں کہ تمام ٹھہراؤ کے نقطے اعظم یا اقل نقطے ہوں۔ ایسا ممکن ہے کہ ف (لا) کی قیمت مثبت سے کم ہو، آہستہ آہستہ صفر ہو جائے اور پھر بڑھنے لگے یعنی ہمیشہ مثبت رہے۔ اسی طرح یہ بھی ممکن ہے کہ ف (لا) کی قیمت منفی سے بڑھتے بڑھتے صفر ہو جائے اور پھر ٹھکنے لگے یعنی ہمیشہ منفی رہے۔ ظاہر ہے کہ یہ نقطے اعظم یا اقل نقطے نہیں ہیں۔ چونکہ ان نقطوں پر منحنی مڑ جاتا ہے جیسا کہ ترسیم سے ظاہر ہے اس لیے ان نقطوں کو انعطاف کے نقطے کہتے ہیں۔ پس ٹھہراؤ کے نقطوں میں مزید امتیاز کرنے کے لیے ف (لا) کی علامت ٹھہراؤ کے نقطے سے ذرا پہلے اور ذرا بعد دریافت کرو۔ یاد رہے کہ ف (لا) کی ٹھیک قیمت نکالنے کی ضرورت نہیں بلکہ صرف علامت درکار ہے۔ اب اگر دونوں جانب علامت ایک ہی ہے تو یہ انعطاف کا نقطہ ہے اور اگر علامت مثبت سے منفی ہوتی ہے تو اعظم نقطہ ہے اور اگر علامت منفی سے مثبت ہوتی ہے تو اقل نقطہ ہے۔ واضح رہے کہ ف (لا) = ۰ کے علاوہ اور بھی انعطاف کے نقطے ہو سکتے ہیں لیکن اعظم اور اقل نقطوں کے لیے یہ شرط ضروری ہے جو اس صورت کے جبکہ منحنی کا ڈھال غیر سلسل ہے۔



مثال (۱)۔ منحنی  $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 6x + 5$  کے ٹھہراؤ کے

نقطے دریافت کرو اور ان میں تفریق کرو۔

$$r(r+v)(r-v)(1-v) = 1 + v r - v^2 r - v^2 v = \frac{1}{v} r$$

اب ٹھیراؤ کے نقطوں کے لیے  $\frac{r}{r+1} = \frac{1}{2}$  یعنی  $(1-1)(1-1)(1-1) = 1$

اور  $u = 1, 2, \dots$

نقطہ ۱۱ = اگر  $\frac{1}{2}$  کافی چھوٹی مثبت مقدار ہو تو

لا = -۱ کے لیے  $\frac{\text{فرما کی علامت ہے}}{\text{فر}}$   $(+) = (+)(-)(-)$

$$(-) = (+)(-)(+) \quad \dots \dots \dots +1 = 1$$

اس لیے  $\lambda =$  اتفاعل کا اعظم نقطہ ہے اور اعظم قیمت  $\frac{19}{20}$  ۱۲ ہے

اسی طرح  $++ = +$  کے لیے فرما کی علامت ہے  $(+)(+) = (+)$   $(-)(-) = (+)$

$$(+)= (+)(+)(+) \dots \dots \dots +^{\infty} = 1$$

اس لیے  $\lambda = \mu$  تفاعل کا اقل نقطہ ہے اور تفاعل کی اقل قیمت  $\frac{21}{8}$  ہے

اور  $1 - 2 = -1$  پر  $1 - 2 = -1$  کے لیے  $\frac{فرما}{فرق}$  کی علامت ہے  $(-)(-)(+) = (+)$

$(+)= (+)(-)(-)$  .....  $x + r = 1$  da

اس لیے  $\lambda = 2$  - نقطۂ العطا ہے اور یہاں تفاعل کی قیمت  $-\frac{2}{5}$  ہے۔

(۲) ذیل کے مخیوں کے ٹھیرا کے نقطے دریافت کرو اور ان میں تمیز کرو۔

$$5 - 19 - 13 - 1 = 1 \quad (1)$$

$$(1-u)u = \frac{1}{2} \quad (b)$$

$$r - 11r + 109 - 10r = 6(j)$$

$$r + v r - v \frac{1}{r} - v \frac{1}{r} = 1 \quad (5)$$

(۳) ذیل کے تقاضوں کی اعظم اور اقل قیمتیں محسوب کرو۔

$$(۱) \quad ۱۲ - ۸ - ۲۲ + ۲۲ - ۱۲ + ۱۲$$

$$(ب) \quad ۱۲ (۱۲ + ۱) (۱۲ - ۱) (۱۲ - ۱)$$

$$(ج) \quad ۱۲ (۱۲ + ۱) (۱۲ - ۱) (۱۲ - ۱)$$

$$(د) \quad (۱۲ + ۱) (۱۲ - ۱) (۱۲ - ۱) (۱۲ + ۱)$$

۴۷۲ - دوسرے رتبہ کے مشتق کی ہندسی تعبیر :-

گذشتہ دفعہ میں اعظم اور اقل قیمتیں حاصل کی گئی ہیں اور ان میں امتیاز کرنے کے لیے  $\frac{فرما}{فرلا}$  کی علامت پر نقطہ سے ذرا پہلے اور ذرا بعد غور کرنا پڑتا ہے۔ لیکن اکثر سوالات میں یہ مشکل ہوگا۔ ہمیں معلوم ہے کہ جیسے پہلے مشتق  $\frac{فرما}{فرلا}$  کی مثبت یا منفی علامت اس بات کو تعبیر کرتی ہے کہ لاکے بڑھنے کے ساتھ بڑھ رہا ہے یا گھٹ رہا ہے۔

اسی طرح  $\frac{فرما}{فرلا}$  کے مشتق یعنی  $\frac{فرما}{فرلا}$  کی مثبت یا منفی علامت اس بات کو تعبیر کرتی ہے کہ لاکے بڑھنے کے ساتھ  $\frac{فرما}{فرلا}$  بڑھ رہا ہے یا گھٹ رہا ہے۔ پس اگر

$\frac{فرما}{فرلا}$  کی قیمت مثبت ہے تو اس کے معنی یہ ہیں کہ لاکے بڑھنے کے ساتھ  $\frac{فرما}{فرلا}$  یعنی منحنی کا ڈھال بڑھ رہا ہے اور  $\frac{فرما}{فرلا}$  کی منفی علامت سے ظاہر

ہے کہ لاکے بڑھنے کے ساتھ  $\frac{فرما}{فرلا}$  گھٹ رہا ہے۔ اب اعظم نقطہ پر  $\frac{فرما}{فرلا}$  مثبت سے منفی قیمت عین اختیار کرتا ہے یعنی گھٹتا ہے۔ اس لیے اعظم نقطہ

پر  $\frac{فرما}{فرلا}$  منفی ہوگا۔ اور اقل نقطہ پر  $\frac{فرما}{فرلا}$  منفی سے مثبت ہوتا ہے۔ یعنی بڑھتا ہے اس لیے اقل نقطہ پر  $\frac{فرما}{فرلا}$  مثبت ہوگا۔ اور نقطہ انعطاف پر منحنی کا ڈھال  $\frac{فرما}{فرلا}$  بڑھنا ختم کر کے گھٹنا شروع کرتا ہے یا گھٹنا ختم کر کے بڑھنا

شروع کرتا ہے یعنی  $\frac{فرما}{فرلا}$  کی قیمت صفر ہے۔

پس اگر کسی نقطہ پر  $\frac{فرما}{فرلا} =$  صفر اور  $\frac{فرما}{فرلا}$  مثبت ہے تو نقطہ اقل نقطہ ہے۔

اور اگر  $\frac{فرما}{فرلا} =$  صفر اور  $\frac{فرما}{فرلا}$  منفی ہے تو اعظم نقطہ ہے۔

اور  $\frac{فرما}{فرلا} =$  صفر اور  $\frac{فرما}{فرلا} =$  صفر تو بالعموم نقطہ انعطاف ہے۔

مثال (۱)  $۶ = ۳لا - ۸لا - ۳۰لا + ۲لا + ۵ + ۸۵$  کے اعظم اور اقل نقطے دریافت کرو۔

$$\frac{فرما}{فرلا} = ۱۲لا - ۳۲لا - ۶۰لا + ۲لا = ۱۲(لا - ۲لا - ۵ + ۶)$$

$$= ۱۲(۱ - لا)(۲ + لا)(۳ - لا)$$

$$\therefore \frac{فرما}{فرلا} = \text{صفر جبکہ } لا = ۱ - ۲ \text{ اور } ۳$$

$$\text{اب } \frac{فرما}{فرلا} = ۳۶لا - ۳۸لا - ۶۰ =$$

$لا = ۱$  کے لیے  $\frac{فرما}{فرلا} = ۳۶ - ۳۸ - ۶۰$  یعنی منفی مقدار ہے اور اس لیے یہ اعظم نقطہ ہے۔

$لا = ۲$  کے لیے  $\frac{فرما}{فرلا} = ۱۴۴ - ۹۶ - ۶۰$  یعنی مثبت مقدار ہے اور یہ اقل نقطہ ہے۔

$لا = ۳$  کے لیے  $\frac{فرما}{فرلا} = ۳۲۴ - ۱۴۴ - ۶۰$  یعنی مثبت مقدار ہے اور یہ اقل نقطہ ہے۔

مثال (۲) ثابت کرو کہ مستقل محیط والے مستطیلوں میں سب سے بڑا مربع مستطیل مربع ہے۔



فرض کرو کہ مستطیل کے اضلاع لا اور ما ہیں اور اس کا محیط ۱۲ ہے۔

$$\text{تو } لا + ما = ۱۲ \quad \text{اور رقبہ سر} = لا \times ما = \frac{(لا^2 - ۱۲لا)}{۲}$$

$$= \frac{لا^2}{۲} - ۶لا$$

$$\frac{لا^2}{۲} - ۶لا = ۱۲ \quad \therefore \quad لا = \frac{۱۲}{۲} = ۶$$

اور  $\frac{۱۲}{لا} = ۲$  اس لیے لا =  $\frac{۱۲}{۲}$  اعظم قیمت ہے اور ما =  $\frac{۱۲}{۲}$

پس مستطیل مربع ہوگا اور اس کا رقبہ اعظم ہوگا۔

ذیل کے تفاعلوں کے لیے اعظم اور اقل قیمتیں محسوب کرو:—

$$(۳) \quad \frac{لا^2}{۲لا + ۱}$$

$$(۴) \quad \frac{لا^2 - ۱۲لا + ۱۲}{۱۰ - لا}$$

$$(۵) \quad \frac{لا^2(لا - ۱)}{لا^2 - ۱}$$

ذیل کے منحنیوں کے ٹھیراؤ کے نقطے معلوم کرو اور ان میں تمیز کرو:—

$$(۶) \quad ۰ = لا^3 - ۱۲لا^2 + ۱۲لا$$

$$(۷) \quad لا^2 = \frac{۱۲}{لا} + ۱۲$$

$$(۸) \quad لا - ۱۲ = ۱۲$$

$$(۹) \quad لا = ۱۲ - ۱۲$$

$$(۱۰) \quad لا(۱ + لا)^2 = لا(۵ - لا)^2$$

(۱۱) ثابت کرو کہ مستقل رقبہ والے مستطیلوں میں سب سے چھوٹے محیط والا

مستطیل مربع ہے۔

(۱۲) ثابت کرو کہ دائرہ کا سب سے بڑا وتر اس کا قطر ہے۔

(۱۳) ایک رُبع دائرہ میں اعظم رقبہ والا مستطیل جو بن سکتا ہے اس کے ابعاد معلوم کرو۔

(۱۴) اگر  $۲ لا + ۱ = ک$  جہاں ک مستقل ہے تو  $(لا \times ما)$  کی اعظم قیمت معلوم کرو۔

(۱۵) خط  $ما = لا$  پر وہ نقطہ معلوم کرو جس کے فاصلوں کا مربع تقاط  $(-۱، ۰)$

اور  $(۰، -۱)$  سے اقل ہو۔

(۱۶) قطر  $لا$  والے دائرہ میں مستطیل بنایا گیا ہے جس کے اضلاع  $لا$  اور  $ما$  ہیں بتاؤ کہ  $لا$  یا

سب یا اعظم ہو گا۔

(۱۷) ایک پھولوں کی کھاری قطاع دائرہ کی شکل کی بنا ما مقصود ہے۔ اس کو مکمل

گھیرنے کے لیے ۲۰ فٹ طول کا تار ہے۔ بتاؤ کہ کھاری کا رقبہ زیادہ سے زیادہ ہونے کی صورت میں قطاع دائرہ کا نصف قطر کیا ہے۔

(۱۸) ایک کھلے تالاب کا قاعدہ مربع ہے اور سطح انتصابی ہیں۔ اور اس کی گنجائش

۴۰۰۰ مکعب فٹ ہے۔ اندر کی جگہ سطح پر سفیدہ کرنے کے اخراجات کم سے کم ہونے کی صورت میں تالاب کے ابعاد معلوم کرو۔

(۱۹) ایک تار کے ٹکڑے کو دو حصوں میں کاٹ کر ایک حصہ کو دائرہ میں اور دوسرے حصہ کو مربع میں

موڑ دیا گیا ہے۔ اگر دونوں شکلوں کے مربع کا مجموعہ اقل ہو تو تار کی تقسیم کی نسبت دریافت کرو۔

(۲۰) بتاؤ کہ ۲۰۰ مربع فٹ کپڑے سے زیادہ سے زیادہ حجم والے مخروطی نما خیمہ کے ابعاد کیا ہونگے۔

۴۱۶۵۔ محذب اور مقعر منحنی :- اگر منحنی کے کسی نقطہ پر تماس

کھینچا جائے تو نقطہ کے قرب میں منحنی، تماس کے کلیتاً اوپر کی جانب یا نیچے کی جانب

یا ایک طرف کا حصہ نیچے کی جانب اور دوسری طرف کا حصہ اوپر کی جانب واقع

ہو گا۔ شکل میں ایک منحنی مرتسم کیا گیا ہے۔ اس کے نقاط  $ا، ب، ج، د$  اور  $ه$  پر منحنی تماس

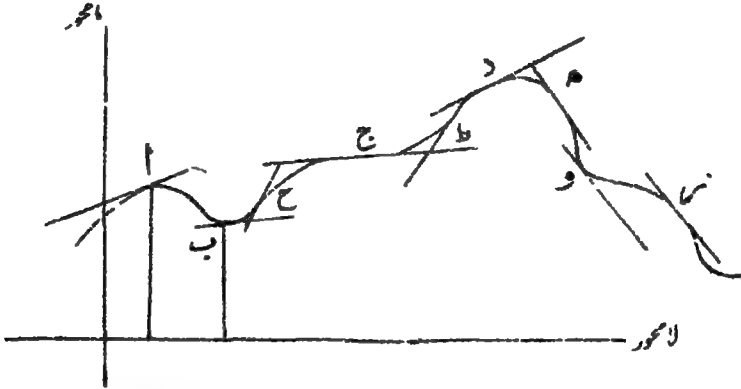
کے کلیتاً نیچے واقع ہے اور نقاط  $ب، ج، د$  پر کلیتاً اوپر واقع ہے نقاط  $ح، د، ه$

پر منحنی کا ایک جانب کا حصہ ایک طرف اور دوسری جانب کا حصہ

دوسری طرف واقع ہے یعنی منحنی، تماس کو ان نقطوں پر عبور کرتا ہے۔ اگر کسی نقطہ

کے دونوں جانب منحنی، تماس کے کلیتاً اوپر واقع ہو تو ایسے نقطہ پر منحنی کو اوپر کی

طرف مقعر کہتے ہیں اور اگر کلیتاً نیچے واقع ہو تو منحنی کو اس نقطہ پر اوپر کی طرف محدب کہتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ اوپر کی طرف مقعر اور نیچے کی طرف محدب ایک ہی بات ہے اور اسی طرح اوپر کی طرف محدب اور نیچے کی طرف مقعر ایک ہی چیز ہے۔ نیز اگر منحنی



ماس کو عبور کرے تو ایسے نقطہ کو نقطۃ انقلاب کہتے ہیں۔ ہر نقطۃ انعطاف منحنی کے محدب اور مقعر حصوں کو جدا کرتا ہے۔

اب اوپر کی طرف محدب نقطے کے قرب میں منحنی کلیتاً ماس کے نیچے واقع ہے یعنی ماس کا ڈھال مسلسل کم ہوتا جاتا ہے۔ اور مقعر نقطہ کے قرب میں ماس کا ڈھال بڑھتا جاتا ہے۔ اور نقطۃ انعطاف پر ماس کا ڈھال بڑھنا یا گھٹنا ختم کر کے گھٹنا یا بڑھنا عین شروع کرتا ہے۔ اس لیے محدب نقطہ پر  $\frac{f''}{f}$  منفی ہے۔

مقعر نقطہ پر  $\frac{f''}{f}$  مثبت ہے اور نقطۃ انعطاف پر  $\frac{f''}{f}$  صفر ہے۔

اگر محدب نقطہ پر  $\frac{f''}{f}$  صفر ہے تو یہ اعظم نقطہ ہوگا اور مقعر نقطہ پر  $\frac{f''}{f} = 0$ ۔ تو اقل نقطہ ہوگا۔ اس سے ظاہر ہے کہ اعظم اور اقل نقطے منحنی کے محدب اور مقعر نقطوں میں سے چند نقطے ہیں۔

مثال (۱) منحنی  $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 2$  کے نقاط انعطاف دریافت

کرو اور بتاؤ کہ کون سے حصے محدب اور مقعر ہیں۔

$$\text{اب } \frac{f''}{f} = \frac{6x - 10}{x^3 - 5x^2 + 3x - 2}$$

$$\text{اور } \frac{۲}{۱۱} = ۱۲۸ - ۱۳۰ = \frac{۲}{۱۱} \left( \frac{۵}{۸} - ۱ \right)$$

نقاط انعطاف پر  $\frac{۲}{۱۱}$  = صفر اس لیے ۱۱ = صفر اور  $\frac{۵}{۸}$  نقاط انعطاف ہیں۔  
اگر  $۱۱ >$  صفر تو  $\frac{۲}{۱۱}$  مثبت ہے یعنی منحنی مقعر ہے۔  
اور  $۱۱ <$  صفر ہے لیکن  $\frac{۵}{۸} >$  سے تو  $\frac{۲}{۱۱}$  منفی ہے یعنی منحنی محدب ہے۔

$$۱۱ < \frac{۵}{۸} \text{ سے تو } \frac{۲}{۱۱} \text{ مثبت ہے یعنی منحنی مقعر ہے۔}$$

(۲) منحنی  $۵ = (۳ - ۱۱)^۳$  کے نقاط انعطاف دریافت کرو۔  
منحنی کی مساوات ہے  $۱ = (۳ - ۱۱)^{\frac{۳}{۲}}$

$$\therefore \frac{۳}{\frac{۳}{۲}(۳ - ۱۱)^{\frac{۱}{۲}}} = \frac{۲}{۱۱} = \frac{۲}{۱۱}$$

$$\text{اور } \frac{۲}{۱۱} = \frac{۲}{۱۱} = \frac{۲}{۱۱} = \frac{۲}{۱۱}$$

اس سوال میں  $\frac{۲}{۱۱}$  متغیر لا کی کسی محدود قیمت کے لیے صفر نہیں ہے البتہ

$۱۱ = ۳$  کے لیے  $\frac{۲}{۱۱}$  اور  $\frac{۲}{۱۱}$  دونوں لا متناہی ہیں۔ اور اگر  $۱۱ > ۳$

تو  $\frac{۲}{۱۱}$  منفی ہے اور  $۱۱ < ۳$  تو  $\frac{۲}{۱۱}$  مثبت ہے یعنی  $\frac{۲}{۱۱}$  کی علامت

نقطہ  $۱۱ = ۳$  پر بدلتی ہے اور یہ نقطہ انعطاف ہے اور  $۱۱ > ۳$  کے لیے منحنی محدب ہے اور  $۱۱ < ۳$  کے لیے مقعر ہے۔

(۳)  $۱ = ۱$ ،  $۱ = ۱$ ،  $۱ = ۱$ ،  $۱ = ۱$ ،  $۱ = ۱$  کے لیے نقاط انعطاف

معلوم کرو اور محدب اور مقعر حصوں میں تقسیم کرو۔

ذیل کے منحنیوں کے نقاط انعطاف معلوم کرو اور انہیں محدب اور مقعر حصوں

میں تقسیم کرو۔

$$(۴) ۱ = ۱ \text{ جب } ۱ \text{ 'جم' } ۱ \text{ 'مس' } ۱ \text{ 'قطلا' } ۱ \text{ 'قم' } ۱$$

$$(۵) ۱ = ۱ \text{ 'ولا' } ۱ \text{ 'لوک' } ۱$$

$$(۶) ۱ = ۱ \text{ 'لا' } ۱ - ۱ \text{ 'لا' } ۱ + ۱ \text{ 'لا' } ۱ - ۱ \text{ 'لا' } ۱$$

$$(۷) ۱ = ۱ \text{ 'لا' } ۱ - ۱ \text{ 'لا' } ۱ + ۱ \text{ 'لا' } ۱ - ۱ \text{ 'لا' } ۱$$

$$(۸) ۱ = ۱ \text{ 'لا' } ۱ - ۱ \text{ 'لا' } ۱ + ۱ \text{ 'لا' } ۱ + ۱ \text{ 'لا' } ۱$$

$$(۹) ۱ = ۱ \text{ 'لا' } ۱ - ۱ \text{ 'لا' } ۱$$

$$(۱۰) ۱ = ۱ \text{ 'لا' } ۱ - ۱ \text{ 'لا' } ۱ + ۱ \text{ 'لا' } ۱$$

$$(۱۱) ۱ = ۱ \text{ 'لا' } ۱ - ۱ \text{ 'لا' } ۱ - ۱ \text{ 'لا' } ۱$$

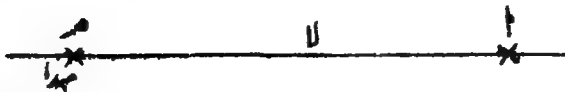
$$(۱۲) ۱ = ۱ \text{ 'لا' } ۱ + ۱ \text{ 'لا' } ۱ + ۱ \text{ 'لا' } ۱ + ۱ \text{ 'لا' } ۱ + ۱ \text{ 'لا' } ۱ + ۱ \text{ 'لا' } ۱ = ۰$$

#### ۴، ۹ - عملی ریاضی میں تفرقی سر کے اطلاقات :-

ابتداء میں بتایا گیا ہے کہ تفرقی سر شرح تبدیلی کا ناپ ہے۔ علم ہند سہ میں اس کے اطلاقات کی چند مثالیں اب تک دی گئی ہیں۔ لیکن تمام علوم سائنس میں ہر موقع پر شرح تبدیلی کے ناپ کی ضرورت پڑتی ہے۔ وقت کے گزرنے کے ساتھ جسم اپنی وضع یا مقدار یا مقام بدلتا ہے اور اس لیے بالعموم جسم کی وضع یا مقدار یا مقام کے بیان کرنے والے اتفاعل میں وقت بھی شریک ہوتا ہے اور بلحاظ وقت تفرقی سر سے شرح تبدیلی کو ناپتے ہیں۔ بالخصوص علم حرکت میں تفرقی سر کا خاص اطلاق ہے۔

#### ۴، ۹ - رفتار اور اسراع :- اگر ایک ذرہ خط مستقیم میں

حرکت کر رہا ہو اور کسی نقطہ ص کو مبدا زمان لیا جائے اور وقت ثانیوں کے بعد



اس کا مقام ۱ ہو جہاں  $۱ = لا$  تو اس آن میں رفتار دریافت کرنے کے لیے

فرض کرو کہ مزید فاصلہ سفر لاطے کرنے میں وقت مفت صرف ہوتا ہے۔ اس لیے رفتار  $\frac{\text{مفت}}{\text{مفت}}$  کی انتہا ہوگی۔

$$\text{یعنی رفتار } s = \frac{\text{فر}^{\text{لا}}}{\text{فر}^{\text{ت}}}$$

اگر ذرہ مستوی میں حرکت کر رہا ہے اور وقت پر ذرہ کے محدود

(لا<sup>ما</sup>) ہیں تو اس کی رفتار (د<sup>و</sup>) محوروں کی سمتوں میں  $\frac{\text{فر}^{\text{لا}}}{\text{فر}^{\text{ت}}}$  اور  $\frac{\text{فر}^{\text{لا}}}{\text{فر}^{\text{ت}}}$

ہوگی۔ اکثر سوالات میں رفتار بھی بدلتی ہے یعنی  $\frac{\text{فر}^{\text{لا}}}{\text{فر}^{\text{ت}}}$  بھی ت کا تفاعل ہوتا ہے۔ رفتار کے بدلنے کی شرح کو اسراع کہتے ہیں اس لیے ایک خط

$$\text{میں اسراع ہوگا } \frac{\text{فر}^{\text{د}}}{\text{فر}^{\text{ت}}} = \frac{\text{فر}^{\text{لا}}}{\text{فر}^{\text{ت}}} = \left( \frac{\text{فر}^{\text{لا}}}{\text{فر}^{\text{ت}}} \right) = \frac{\text{فر}^{\text{لا}}}{\text{فر}^{\text{ت}}}$$

$$= \frac{\text{فر}^{\text{د}}}{\text{فر}^{\text{لا}}} \times \frac{\text{فر}^{\text{لا}}}{\text{فر}^{\text{ت}}} = \frac{\text{فر}^{\text{د}}}{\text{فر}^{\text{ت}}}$$

اور مستوی میں اسراع ہوگا

$$\frac{\text{فر}^{\text{لا}}}{\text{فر}^{\text{ت}}} \text{ اور } \frac{\text{فر}^{\text{لا}}}{\text{فر}^{\text{ت}}} \text{ یا } s \frac{\text{فر}^{\text{د}}}{\text{فر}^{\text{لا}}} \text{ اور } \frac{\text{فر}^{\text{د}}}{\text{فر}^{\text{لا}}} \text{ جہاں}$$

$$s = \frac{\text{فر}^{\text{لا}}}{\text{فر}^{\text{ت}}} \text{ اور } s = \frac{\text{فر}^{\text{لا}}}{\text{فر}^{\text{ت}}}$$

اب اگر کسی سوال میں ایک ذرہ خط مستقیم میں حرکت کر رہا ہو اور اس کا اسراع وقت یا فاصلہ کا تفاعل ہو تو مساوات حرکت ہوگی:-

$$\frac{\text{فر}^{\text{لا}}}{\text{فر}^{\text{ت}}} = \text{ف (ت)}$$

$$\text{یا } s \frac{\text{فر}^{\text{د}}}{\text{فر}^{\text{لا}}} = \text{ف (لا)} \text{ ہر دو صورت میں تکلیف سے رفتار اور فاصلہ}$$

وقت کی رقوم میں دریافت ہو سکتا ہے۔ مثال (۱) ایک ذرہ خط مستقیم میں حرکت کرتا ہے اور اس کا اسراع ع مستقل ہے۔ فاصلہ اور وقت میں رشتہ دریافت کرو۔  
فرض کرو کہ وقت  $t$  پر مبداء سے فاصلہ  $s$  ہے اور وقت صفر پر ذرہ نے مبداء سے رفتار  $b$  کے ساتھ حرکت شروع کی۔

$$ab = \frac{v^2}{2a} = \frac{v^2}{2a}$$

$$\therefore \frac{v^2}{2a} = \frac{v^2}{2a} + \frac{v^2}{2a}$$

ابتدائی شرط سے ظاہر ہے کہ رفتار  $b = 0$ ۔

$$\therefore \frac{v^2}{2a} = b + \frac{v^2}{2a}$$

پھر تکمیل کرنے سے  $b + \frac{v^2}{2a} = \frac{v^2}{2a} + \frac{v^2}{2a}$  مستقل  $\frac{v^2}{2a}$  ہے  
اب چونکہ  $b = 0$  جبکہ  $t = 0$  اس لیے مستقل  $\frac{v^2}{2a}$  صفر ہے

$$\therefore b + \frac{v^2}{2a} = \frac{v^2}{2a}$$

بعض سوالات میں جیسے حرکت زیر جاذبہ میں اسراع مستقل ہے اور نیچے کی طرف تقریباً ۳۲ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ کے مساوی ہے اس کو اکثر ج سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ اگر فاصلہ کے محور کو اوپر کی جانب مثبت لیا جائے تو  $a = -g$  ہوگا اور مساوات میں مناسب ترمیم کرنی پڑے گی۔

مثال (۲) ایک ذرہ خط مستقیم میں حرکت کر رہا ہے اور اس کا اسراع خط کے ایک ثابت نقطہ کی طرف ہے اور فاصلہ کے متناسب ہے۔ حرکت دریافت کرو۔ فرض کرو کہ ثابت نقطہ کو مبداء لیا جاتا ہے اور وقت  $t$  پر ذرہ کا فاصلہ  $s$  ہے اور رفتار  $v$  ہے

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt}$$

$$= \text{ک} - \text{لا} \text{ جہاں ک مثبت مستقل ہے۔}$$

$$\therefore \text{ک} - \text{لا} + \text{م} \text{ جہاں م مستقل ہے۔}$$

اب اگر ابتدائے حرکت پر ذرہ کو فاصلہ  $\text{و}$  سے صفر رفتار سے چھوڑ دیا جاتا ہے تو

$$\text{و} = 0 \text{ جبکہ } \text{لا} = \text{و اور ت} = 0$$

$$\therefore \text{ک} = \text{و} - \text{لا}$$

$$\therefore \text{ک} \pm \text{لا} = \text{و}$$

$$\frac{\text{و}}{\text{ک} \pm \text{لا}}$$

اگر ذرہ کو صفر رفتار سے چھوڑ دیا جاتا ہے تو ظاہر ہے کہ کشش کے زیرِ عمل

$$\text{یہ مبداء کی طرف حرکت کریگا یعنی } \text{و} = \frac{\text{فرلا}}{\text{زت}} = \text{ک} \times \text{لا} - \text{لا}$$

$$\therefore \text{ک} - \text{لا} = \frac{\text{فرلا}}{\text{لا} - \text{لا}}$$

$$\therefore \text{جم} = \frac{\text{لا}}{\text{و}} = \text{ک} + \text{م} \text{ مستقل م}$$

$$\therefore \text{جم} = \frac{\text{لا}}{\text{و}} = (\text{ک} + \text{م})$$

$$\text{اب لا} = \text{و جبکہ ت} = 0$$

$$\therefore 1 = \text{جم} (\text{م}) \therefore \text{م} = \text{صفر}$$

$$\text{اور لا} = \text{و جم ک ت}$$

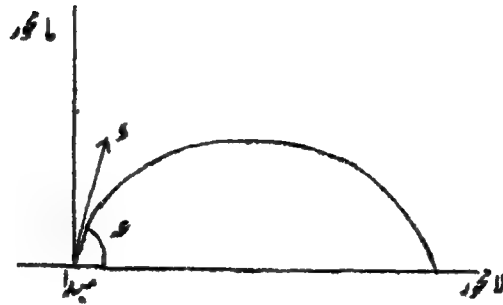
مثال (۳) ایک ذرہ کو ابتدائی رفتار  $\text{و}$  سے افق سے زاویہ  $\text{ع}$  پر پھینک دیا گیا ہے۔ اگر حرکت جاذبہ کے زیرِ عمل ہو اور ہوا کی مزاحمت کو نظر انداز کر دیا جائے تو طریق دریافت کرو۔

ذرہ ایک انتصابی مستوی میں حرکت کریگا۔ نقطہ رعی کو مبداء ارمان لو اور



حرکت کی سمت میں افقی خط کو لا محور اور انتصابی خط کو ما محور لو۔ اور فرض کرو کہ نصف وقت پر ذرہ نے مبدا سے حرکت شروع کی۔ تو لا اور ما محور کی سمت میں وقت کے بعد

$$\frac{\text{فرقا}}{\text{وقت}^2} = \text{صفر}$$



اور  $\frac{\text{فرقا}}{\text{وقت}^2} = -ج$  جہاں ج جاذبہ کا اسراع ہے۔

تکمل کرنے سے  $\frac{\text{فرقا}}{\text{وقت}} = \text{مستقل}$

اور  $\frac{\text{فرقا}}{\text{وقت}} = -ج ت + \text{مستقل}$

اب  $ت = 0$  تو  $\frac{\text{فرقا}}{\text{وقت}} = \text{رجم ع}$

اور  $\frac{\text{فرقا}}{\text{وقت}} = \text{رجب ع}$

$\therefore \frac{\text{فرقا}}{\text{وقت}} = \text{رجم ع}$

اور  $\frac{\text{فرقا}}{\text{وقت}} = -ج ت + \text{رجب ع}$

دوبارہ تکمل کرنے سے

$\frac{\text{فرقا}}{\text{وقت}} = -ج ت + \text{رجب ع} + \text{مستقل}$

$\frac{\text{فرقا}}{\text{وقت}} = -ج ت + \text{رجب ع} + \text{مستقل}$

چونکہ  $لا = ا = ج$  جبکہ  $ت =$  اس لیے لا اور ا کے مستقل صفر ہیں۔  
 پس  $لا = ا = ج$  و  $جم = ا$  ت  
 $ا = ج$  و  $جم = ا$  ت -  $\frac{1}{4}$  ج ت  
 یہ طریق کی تبدیل مساوات ہے۔ اس میں سے ت ساقط کرنے سے طریق کی  
 کارٹیزی مساوات  $ا = لا$  مس =  $\frac{1}{4}$  ج  $\frac{لا}{جم}$  حاصل ہوتی ہے۔  
 یہ طریق ایک مکافی ہے۔

(۴) ایک ریل کو مستقل ابٹاء لگا کر روکا جاتا ہے۔ اگر ابٹاء لگانے کے  
 بعد پہلے ثانیہ میں ۸۴ فٹ کا فاصلہ اور دوسرے ثانیہ میں ۸۸ فٹ کا فاصلہ  
 طے کرے تو ریل کی ابتدائی رفتار رکنے تک وقت اور طے شدہ فاصلہ  
 معلوم کرو۔

(۵) دو مقاموں کے درمیان فاصلہ ۱۰ فٹ ہے۔ ریل ایک مقام سے  
 مستقل اسراع ع سے حرکت شروع کرتی ہے۔ کچھ دیر بعد اسراع روک کر ابٹاء آغ  
 لگا دیا جاتا ہے اور دوسرے مقام پر ریل عین رک جاتی ہے۔ ثابت کرو کہ ایک مقام  
 سے دوسرے مقام تک جانے میں  $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{ع + ع}{ع}}$  ثانیہ لگتا ہے۔

(۶) ذیل میں خطی حرکت میں فاصلہ اور وقت میں رشتہ دیا گیا ہے۔ رفتار  
 اور اسراع مطلوبہ آن پر دریافت کرو۔

(۱)  $س = ۴۸ ت - ۱۶ ت^۲$  جبکہ  $ت = \frac{۳}{۴}$  تا  $\frac{۳}{۴}$  ثانیہ

(ب)  $لا = ا = ج$  و  $جم = \frac{۳}{۴} ت$  جبکہ  $ت = \frac{۱}{۴}$  تا  $\frac{۳}{۴}$  ثانیہ

(ج)  $لا = ب$  و  $قوات$  جبکہ  $ت =$  ثانیہ

(د)  $ا = ۲ ت - ت^۲$  جبکہ  $ت =$  صفر تا ثانیہ

(۷) اگر ایک ذرہ خط مستقیم میں حرکت کر رہا ہو اور فاصلہ اور وقت میں رشتہ  
 $ج =$  ثابت ہو تو ثابت کرو کہ اسراع رفتار کے معکوب کی طرح

بدلتی ہے۔

(۸) اگر فاصلہ اور وقت میں رشتہ  $s = v \cdot t + \frac{1}{2} a t^2$  ہو

تو ثابت کرو کہ اسراع طے شدہ فاصلہ کے مساوی ہے۔

(۹) اگر مستوی میں حرکت کی صورت میں وقت اور فاصلوں میں رشتہ

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

تو ثابت کرو کہ رفتار مستقل ہے۔

(۱۰) اگر ایک ذرہ خط مستقیم میں ایسے اسراع کے زیر عمل حرکت کرے کہ اسراع

فاصلہ کے متناسب ہو۔ اور ابتدائی رفتار صفر ہو تو فاصلہ اور وقت میں رشتہ دریافت کرو۔

(۱۱) ایک ذرہ کی خط مستقیم میں حرکت سکون سے ایسے اسراع کے زیر عمل ہے

جو ایک ثابت نقطہ کی طرف ہے اور فاصلہ کے چار گنا کے مساوی ہے اور ابتدا میں

ذرہ ثابت نقطہ سے ۳ فٹ کے فاصلہ پر ہو تو فاصلہ اور وقت میں رشتہ دریافت کرو۔

نیز بتاؤ کہ ۵ ثانیہ کے بعد رفتار اور فاصلہ کیا ہوگا۔

(۱۲) ایک ذرہ کو انقباضی ستوی میں ۶۴ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے

افق سے (۱) ۳۰ اور (۲) ۵۴ اور (۳) ۶۰ پر پھینکا جاتا ہے۔ بتاؤ کہ نقطہ

رہی میں منفی ستوی پر وہ کس فاصلہ پر گرے گا اور کتنی دیر بعد گرے گا۔ نیز ذرہ کی زیادہ

سے زیادہ بلندی دریافت کرو۔

۴۹۲ - شرح تبدیلی کے دیگر اطلاقات :- جیسا اوپر

بیان کیا گیا ہے تفرقی سر شرح تبدیلی کو ناپنے کے لیے استعمال کیا جاتا ہے ذیل

میں مختلف قسم کی مثالوں سے اس کے چند اطلاقات کو واضح کیا جائیگا۔

مثال (۱) ایک گیس کے پھیلنے کا حرانگہ ارتقانون  $dV = \frac{1}{2} V dt$  مستقل ہے۔

جہاں  $d$  دباؤ اور  $V$  حجم ہے کسی آن میں حجم ۱۰ اکعب فٹ ہے اور دباؤ ۵ پونڈ

فی مربع انچ ہے۔ اگر حجم اس وقت بشرح ایک اکعب فٹ فی ثانیہ گھٹے ہو تو دباؤ

بدلتی کی شرح معلوم کرو۔

اب د ح<sup>۱۴</sup> = مستقل اور  $\frac{\text{فرح}}{\text{فرت}}$  = ۱۔ ا جہاں ت وقت کو تعبیر کرتا ہے  
اس کو بلحاظ وقت کے تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$د \times ۱۲۴ \times \text{ح}^{۱۴} \times \frac{\text{فرح}}{\text{فرت}} + \frac{\text{فرح}}{\text{فرت}} \times \text{فرد} \times \text{ح}^{۱۴} = \text{صفر}$$

$$\therefore \frac{\text{فرد}}{\text{فرت}} = \frac{د \times ۱۲۴ \times \text{ح}^{۱۴} \times \frac{\text{فرح}}{\text{فرت}}}{\frac{\text{فرح}}{\text{فرت}}} = \frac{د \times ۱۲۴ \times \text{ح}^{۱۴}}{\text{ح}}$$

$$= \frac{۵۰ \times ۱۲۴}{۱۰} \times (۱ -)$$

$$= ۶۱۰ \text{ پونڈ فی مربع انچ}$$

یعنی دباؤ ۶۱۰ پونڈ فی مربع انچ فی ثانیہ کی شرح سے بڑھ رہا ہے۔  
نشان (۲) ایک مخروط کے قاعدہ کا نصف قطر اُنی منٹ کی شرح سے  
گھٹ رہا ہے۔ اور ارتفاع ۳۴ فی منٹ کی شرح سے بڑھ رہا ہے۔ اگر کسی آن  
نصف قطر ۱۸ مو اور ارتفاع ۲۴ ہو تو بتاؤ اس وقت حجم اور مخروط کی اُل سطح  
کس شرح سے بدل رہے ہیں۔

فرض کرو کہ وقت پر مخروط کا ارتفاع ۵ اور قاعدہ کا نصف قطر ۲ ہے۔  
 $\therefore \text{حجم ح} = \frac{1}{3} \times \pi \times ۲^2 \times ۵$

$$\text{اور سطح س} = \frac{1}{4} \times \pi \times ۲^2 \times \sqrt{۲^2 + ۵^2} = \frac{1}{4} \times \pi \times \sqrt{۲۹} \times ۲$$

$$\text{اب } \frac{\text{فرح}}{\text{فرت}} = \frac{\pi}{۳} \left( \frac{\text{فرح}}{\text{فرت}} \times ۲ + \frac{\text{فرد}}{\text{فرت}} \right) = \frac{\pi}{۳} (۲ + ۲ \times \frac{\text{فرح}}{\text{فرت}}) = \frac{\pi}{۳} (۲ + ۲ \times \frac{\text{فرح}}{\text{فرت}})$$

$$= \frac{\pi}{۳} (۲ + ۲ \times \frac{\text{فرح}}{\text{فرت}}) = \frac{\pi}{۳} (۲ + ۲ \times \frac{\text{فرح}}{\text{فرت}})$$

$$\text{اور } \frac{\text{فرد}}{\text{فرت}} = \frac{\pi}{4} \left( \frac{\text{فرح}}{\text{فرت}} \times \frac{۲}{\sqrt{۲۹}} + \frac{\text{فرد}}{\text{فرت}} \times \frac{۵}{\sqrt{۲۹}} \right) = \frac{\pi}{4} \left( \frac{\text{فرح}}{\text{فرت}} \times \frac{۲}{\sqrt{۲۹}} + \frac{\text{فرد}}{\text{فرت}} \times \frac{۵}{\sqrt{۲۹}} \right)$$

$$= \frac{\pi}{4} \left( \frac{\text{فرح}}{\text{فرت}} \times \frac{۲}{\sqrt{۲۹}} + \frac{\text{فرد}}{\text{فرت}} \times \frac{۵}{\sqrt{۲۹}} \right) = \frac{\pi}{4} \left( \frac{\text{فرح}}{\text{فرت}} \times \frac{۲}{\sqrt{۲۹}} + \frac{\text{فرد}}{\text{فرت}} \times \frac{۵}{\sqrt{۲۹}} \right)$$

$$= \frac{\pi}{4} (۲ + ۵ \times \frac{\text{فرح}}{\text{فرت}})$$

$$\pi \frac{12}{5} = (1222 - 1291) \frac{\pi}{30} =$$

یعنی حجم ۱۰۸  $\pi$  کعب ایچ فی فٹ بڑھ رہا ہے اور سطح  $\frac{312}{5} \pi$  مربع ایچ فی منٹ بڑھ رہی ہے۔

(۳) ایک کرہ کا حجم ۱۶ کعب ایچ فی ثانیہ بڑھ رہا ہے۔ بتاؤ کہ نصف قطر اور کرہ کی سطح کس شرح سے بڑھ رہی ہے جبکہ کرہ کا نصف قطر ۶ ہے۔

(۴) ایک ۶ فٹ قد والا آدمی روشنی کے مبدا سے جو فرش سے ۵ فٹ کی اونچائی پر لٹک رہا ہے ۳ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے دور ہٹ رہا ہے۔ بتاؤ کہ سایہ کا آخری سر کس شرح سے حرکت کر رہا ہے۔ نیز بتاؤ کہ سایہ کا طول کس شرح سے بڑھ رہا ہے۔

(۵) ایک ۲۴ فٹ لمبی سیڑھی دیوار کے ساتھ رکھی ہوئی ہے۔ اس کا پخلا سرا دیوار سے ۸ فٹ کے فاصلہ پر ہے۔ اگر سیڑھی کا پخلا سرا ۳ فٹ فی ثانیہ کے حساب سے دیوار سے دور ہٹ رہا ہے تو اوپر کے سرے کی حرکت کی شرح دریافت کرو۔

(۶) ایک سختی کی مساوات  $Ma^2 = 2La$  ہے۔ اگر لاک کی قیمت  $\frac{1}{2}$  اکائیوں فی ثانیہ گھٹ رہی ہو تو بتاؤ نقطہ (۸-۴) پر ڈھال کس شرح سے گھٹ رہا ہے۔

(۷) اگر  $Ma = La + \frac{1}{L}$  تو  $M$  کے بدلنے کی اوسط شرح بلحاظ  $L$  کے معلوم کرو جبکہ لاک کی قیمت ۲ سے ۴ تک بدلتی ہے۔ نیز اس آن پر شرح معلوم کرو جبکہ  $La = 2$ ۔

(۸) ایک ذرہ  $M$  کافی  $Ma = La$  پر اس طرح حرکت کر رہا ہے کہ اس کا فصلہ فی ثانیہ ۲ اکائیوں کی مستقل شرح سے بڑھ رہا ہے تو بتاؤ کہ نقطہ زیر بحث اور نقطہ (۸-۴) کے درمیان فاصلہ کس شرح سے بدل رہا ہے جبکہ  $La = 2$  اور  $La = 8$ ۔

(۹) ایک حوض کی شکل ایک ایسے مستطیل خطوط کی مانند ہے جس کا راس نیچے ہے اور قطر ارتفاع کے مساوی ہے۔ بتاؤ اس کے اندر پانی کس شرح سے

ڈالا جا رہا ہے جبکہ گہرائی ۵ ہے اور گہرائی بحساب ۴ فی منٹ کے بڑھ رہی ہے۔

(۱۰) ایک آدمی میل فی گھنٹہ کی رفتار سے ایک بُرج کی طرف (جو ۶۰ اونچا ہے) چل رہا ہے۔ اگر وہ بُرج کی تہ سے ۸۰ فٹ کے فاصلہ پر ہو تو بتاؤ کہ وہ بُرج کی چوٹی کے نزدیک کس شرح سے آ رہا ہے۔  
(۱۱) ایک مخروط کے قاعدہ کا قطر ۲ فی منٹ کی شرح سے بڑھ رہا ہے اور ارتفاع ۴ فی منٹ کی شرح سے گھٹ رہا ہے۔ اگر نصف قطر ۶ اور ارتفاع ۲۰ ہو تو حجم اور منحنی سطح کے بدلنے کی شرح معلوم کرو۔

(۱۲) ایک مخروطی قیفت کا نصف قطر ۳ ہے اور اس کا ارتفاع بھی ۳ ہے۔ اگر ایک مایع اس میں سے بشرح ایک کعب انچ فی منٹ بہہ رہا ہے تو بتاؤ جبکہ مایع کی سطح چوٹی سے ۱ کی گہرائی پر ہو تو سطح کس شرح سے گر رہی ہے۔

# باب سوم تکمل

## ۱۵۔ غیر معین تکملہ کی تعریف -

باب سوم کی دفعہ ۳۲۵ میں ہم نے دیکھا ہے کہ اگر کوئی تفاعل ف (لا) دیا ہوا ہو اور ہم ایک دوسرا تفاعل فہ (لا) ایسا معلوم کر سکیں کہ

$$\text{فہ (لا)} = \text{ف (لا)} \dots\dots\dots (۱)$$

تو تفاعل فہ (لا) کو دیے ہوئے تفاعل ف (لا) کا "تکملہ" اور اس عمل کو جس کے ذریعہ تفاعل فہ (لا) معلوم کیا جاتا ہے عمل "تکمل" کہتے ہیں اور اس کو ظاہر کرنے کے لیے حسب ذیل ترقیم اختیار کی جاتی ہے:-

$$\text{فہ (لا)} = \text{ف (لا) فلا} \dots\dots\dots (۲)$$

نیز تفاعل ف (لا) کو "متکمل" کہا جاتا ہے۔

مثال کے طور پر ہم نے دیکھا تھا کہ اگر ف (لا) = ۵ لا + ۳ لا + ۴ ہو تو وہ تفاعل جس کا تفرقی سرہ لا + ۳ لا + ۴ ہو لا + لا + ۴ لا ہے اور اس لیے لا + لا + ۳ لا تفاعل ۵ لا + ۳ لا + ۴ کا تکملہ ہے۔

لیکن اگر ہم ایک تفاعل  $۲\text{لا} + ۳\text{لا}$  میں اور اس کو تفریق کریں تو

$$۳ + ۲\text{لا} = (۲\text{لا} + ۳\text{لا}) \text{ فرلا}$$

اس کے بعد اگر ہم  $۲ + ۳$  کو پھر تکمل کریں تو

$$۲ + ۳\text{لا} = ۲ + \frac{۳}{۲} \cdot ۲ = (۳ + ۲\text{لا}) \text{ فرلا}$$

یعنی وہی ابتدائی تفاعل  $۲\text{لا} + ۳\text{لا}$  حاصل ہوتا ہے۔ اس سے ظاہر ہے کہ تکمل اور تفریق کے عمل بالکل اسی طرح ایک دوسرے کے متضاد ہیں جیسے کہ عمل جمع و تفریق ضرب و تقسیم، جذر و مربع، نوکارتق و قوت، فنا و غیرہ۔ اوپر ہم نے بتلایا ہے کہ

$$(۳ + ۲\text{لا}) \text{ فرلا} = ۲\text{لا} + ۳\text{لا} \dots \dots \dots (۳)$$

یعنی اگر تفاعل  $۲\text{لا} + ۳\text{لا}$  کو تفریق کیا جائے  $۳ + ۲\text{لا}$  حاصل ہوتا ہے۔ لیکن ہم کو معلوم ہے کہ

$$۳ + ۲\text{لا} = (۱۰ + ۲\text{لا} + ۳\text{لا}) \text{ فرلا}$$

پس تفاعل  $۳ + ۲\text{لا}$  کا تکمل  $۲\text{لا} + ۳\text{لا} + ۱۰$  بھی ہو سکتا ہے۔ اگر عدد ۱۰ کے بجائے ہم کوئی دوسرا عدد رکھیں تب بھی یہی نتیجہ نکلتا ہے اس لیے تکمل کا مذکورہ بالا عمل اس طرح کامل طور پر معین نہیں ہے جس طرح تفریق کا عمل معین ہے۔ یعنی اگر ہم کسی ویسے ہوئے تفاعل کو تفریق کریں تو ہم نے دیکھا ہے کہ اس عمل سے ایک اور صرف ایک ہی تفاعل تفریق کر کے طور پر حاصل ہوتا ہے۔ اس کے برخلاف ہم اب دیکھتے ہیں کہ ایسے بے شمار تفاعل ہیں جن کو تفریق کرنے سے ایک دیا ہوا تفاعل حاصل ہو سکتا ہے۔ یہ تمام تفاعل ایک دوسرے سے بقدر ایک مستقل عدد کے مختلف ہوتے ہیں۔ اس لیے مساوات (۳) کی بجائے یہ لکھنا زیادہ صحیح ہے کہ



(۴) ..... ک + لا ۳ + لا ۲ = فلا (۳ + لا ۴) ک  
جہاں کہ ایک اختیاری عدد ہے جو -∞ سے +∞ تک تمام قیمتیں اختیار کر سکتا ہے۔  
کہ کو "تکمل کا مستقل" کہتے ہیں اور چونکہ مساوات (۴) میں ک بالکل صفر نہیں بلکہ اختیاری  
ہے اس لیے لا ۲ + لا ۳ + ک کو (۳ + لا ۴) کا "غیر معین تکملہ" کہتے ہیں۔

اس طرح عام طور پر اگر ایک تفاعل ف (لا) دیا ہوا ہو اور ف (لا)  
اختیاری مستقل کو شامل کیے بغیر ایک ایسا تفاعل ہو کہ

$$\frac{\text{ف}}{\text{فلا}} \text{ ف (لا) = ف (لا)}$$

تو ہم یوں لکھتے ہیں کہ

ف (لا) فلا = ف (لا) + ک ..... (۵)  
اور ف (لا) + ک کو ف (لا) کا غیر معین تکملہ کہتے ہیں۔

## ۵، ۲۔ ابتدائی معیاری شکلیں۔

دفعہ ۳، ۶ باب سوم میں جن اہم تفاعلوں کے تفرقی سر ہم نے دریافت  
کیے ہیں ان کے متغیوب لینے سے ہم کو حسب ذیل تکملے فوراً حاصل ہوتے ہیں۔  
طالب علم کو چاہیے کہ تفرق کر کے ان میں سے ہر ایک نتیجہ کی تصدیق کرے  
اور آئندہ استعمال کے لیے انہیں بخوبی ذہن نشین کر لے۔

(۱) ف مر فلا = مر لا + ک جہاں مر ایک دیا ہوا مستقل عدد ہے۔

(۲) ف مر ف (لا) فلا = مر ف (لا) فلا

(۳) ف {فم (لا) ± ف (لا) ± فم (لا) ± .....} فلا

= فم (لا) فلا ± ف (لا) فلا ± فم (لا) فلا + .....

(۴) ف لا فلا =  $\frac{1+n}{1+n}$  + ک جہاں ن کوئی مثبت منفی صحیح یا کسری عدد

ہے سوائے ۱ کے۔

$$(۵) \int \frac{1}{u} du = \log u + C$$

$$(۶) \int \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{u} + C$$

$$(۷) \int \frac{1}{u^3} du = -\frac{1}{2u^2} + C$$

$$(۸) \int \frac{1}{u^4} du = -\frac{1}{3u^3} + C$$

$$(۹) \int \frac{1}{u^5} du = -\frac{1}{4u^4} + C$$

$$(۱۰) \int \frac{1}{u^6} du = -\frac{1}{5u^5} + C$$

$$(۱۱) \int \frac{1}{u^7} du = -\frac{1}{6u^6} + C$$

$$(۱۲) \int \frac{1}{u^8} du = -\frac{1}{7u^7} + C$$

$$(۱۳) \int \frac{1}{u^9} du = -\frac{1}{8u^8} + C$$

$$(۱۴) \int \frac{1}{u^{10}} du = -\frac{1}{9u^9} + C$$

$$= -\frac{1}{10u^{10}} + C$$

$$(۱۵) \int \frac{1}{u^{11}} du = -\frac{1}{10u^{10}} + C$$

$$= -\frac{1}{11u^{11}} + C$$

$$(۱۶) \int \frac{1}{u^{12}} du = -\frac{1}{11u^{11}} + C$$

$$= -\frac{1}{12u^{12}} + C$$

ان کے علاوہ اور بھی چند آسان تکلیفیں ہیں جن کی ہم کو اکثر ضرورت پڑتی ہے اور جن کی قیمت ہم اب معلوم کر چکے۔



$$\begin{aligned} & \frac{1}{\left(\frac{\pi}{r} + \frac{u}{r}\right) \text{ جم}} \times \frac{\text{جم} \left(\frac{\pi}{r} + \frac{u}{r}\right)}{\left(\frac{\pi}{r} + \frac{u}{r}\right) \text{ جب}} = \\ & \frac{1}{\left(\frac{\pi}{r} + \frac{u}{r}\right) \text{ جم} \left(\frac{\pi}{r} + \frac{u}{r}\right) \text{ جب}} = \\ & \frac{1}{\text{جم} \text{ لا}} = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{r} + \frac{u}{r}\right) \text{ جب}} = \frac{1}{\left(\frac{\pi}{r} \text{ ۲} + \frac{u}{r} \text{ ۲}\right) \text{ جب}} = \\ & \text{قط لا} = \end{aligned}$$

پس  $\text{قط لا زلا} = \text{لوک (مس لا + قط لا)} + \text{ک}$

$= \text{لوک مس} \left(\frac{\pi}{r} + \frac{u}{r}\right) + \text{ک}$

(۲۰) اگر  $\text{ا} = \text{لوک (قم لا - مم لا)}$

تو  $\frac{\text{فر ا}}{\text{زلا}} = \frac{\text{قم لا} - \text{مم لا}}{\text{قم لا} - \text{مم لا} + \text{قم لا}} =$

$= \frac{1}{\text{قم لا} - \text{مم لا}} \times \text{قم لا} = \text{قم لا} =$

نیز اگر  $\text{ا} = \text{لوک مس} \frac{u}{r}$

تو  $\frac{\text{فر ا}}{\text{زلا}} = \frac{1}{\text{مس لا}} \times \text{قط لا} \times \frac{u}{r} = \frac{1}{r} \times \frac{u}{r} \times \frac{1}{\text{جم لا}} =$

$= \frac{1}{\text{جم لا}} = \frac{1}{\text{جب لا}} = \frac{1}{\text{جم لا}} =$

پس  $\text{قم لا زلا} = \text{لوک (قم لا - مم لا)} + \text{ک}$

$= \text{لوک مس} \frac{u}{r} + \text{ک}$







کی جاسکتی ہے۔

## مشقی سوالات ۲۲

ذیل کے تفاعلوں کا غیر معین تکملہ لکھو:-

- |  |  |
|--|--|
| (۱) $1 + 2 \text{ ب}$                                  | (۲) $3 \text{ لا} - 2 \text{ لا} + 4 \text{ لا}$     |
| (۳) $\frac{1 \text{ لا} - 2 \text{ ب}}{0}$             | (۴) $\frac{5 + 10 \text{ لا}}{2 \text{ لا}}$         |
| (۵) $(1 - \frac{1}{2 \text{ لا}})^2$                   | (۶) $\frac{1}{2 \text{ لا} - 2}$                     |
| (۷) $\frac{1}{3 - 2 \text{ لا}}$                       | (۸) $\frac{1}{2 \text{ لا} - 2}$                     |
| (۹) $\frac{1}{9 + 2 \text{ لا}}$                       | (۱۰) $\frac{1}{2 \text{ لا} - 10}$                   |
| (۱۱) $3 \text{ م}^2 \text{ ط}$                         | (۱۲) $3 \text{ م} \text{ ط} + 4 \text{ م} \text{ ط}$ |
| (۱۳) $3 \text{ م}^2 \text{ ط} + 4 \text{ م} \text{ ط}$ | (۱۴) $10 + 1 \text{ لا}$                             |

## ۳ و ۵۔ متغیر کی تبدیلی -

تکمل کے لیے اکثر ایسے تفاعل بھی دیے جاتے ہیں جو بظاہر دفعہ ۲۵ کے

کی معیاری شکلوں میں سے کسی شکل کے نہیں ہوتے لیکن متغیر کو بدل کر ہم ان کو کسی معیاری شکل میں لا سکتے ہیں۔ اس طریقہ کو پہلے ہم چند آسان مثالوں کے ذریعہ سے واضح کریں گے اور پھر اس کا عام قاعدہ بتلا سینگے۔

مثال ۱۔  $(1 + 2 \text{ لا})$  کو تکمل کرو۔  $1$  کوئی مستقل عدد ہے۔

رکھو  $1 = 1 + 2 \text{ لا}$  یعنی  $1 - 2 \text{ لا} = 1$

تو  $\frac{1}{1 - 2 \text{ لا}} = 1$  یعنی  $1 - 2 \text{ لا} = 1$  قرا



اس لیے  $\text{ک} (۱ + ۱) \text{فرلا} = \text{ک} ۲ \text{فرما} = \frac{۱}{۳} \text{ک} ۲ + \text{ک}$

$$= \frac{۱}{۳} \text{ک} (۱ + ۱) ۲ + \text{ک} \dots (۱)$$

یہاں ہم دیکھتے ہیں کہ اگرچہ  $(۱ + ۱) ۲$  کوئی معیاری تفاعل نہیں ہے لیکن ہم اس کو فوراً معیاری شکل کے تفاعل میں تبدیل کر دے سکتے ہیں اگر لاکھ بجائے ۱ رکھا جائے۔

البتہ اس مثال میں خاص طور پر ایک ایسا تفاعل دیا گیا ہے جس کو ہم ابتدائی طریقوں سے بھی حل کر سکتے ہیں کیونکہ

$$\text{ک} (۱ + ۱) ۲ \text{فرلا} = \text{ک} (۱ + ۱ + ۱ + ۱) ۲ \text{فرلا} = \frac{۱}{۳} \text{ک} ۲ + \frac{۱}{۳} \text{ک} ۲ + \frac{۱}{۳} \text{ک} ۲ + \frac{۱}{۳} \text{ک} ۲ + \text{ک}$$

طالب علم پھیلا کر یہ تصدیق کر سکتا ہے کہ اوپر کے مکملہ (۱) اور اس آخری جملہ میں صرف ایک مستقل رقم کا فرق ہے اور چونکہ ک اور ک اختیاری مستقل ہیں اس لیے اس مستقل رقم کو ک میں شامل فرض کر سکتے ہیں۔

مثال ۲ -  $\frac{۱}{۱ + ۱ + ۱}$  کو تکمل کرو۔ اور ب مستقل ہیں۔

$$\text{رکھو } ۱ + ۱ + ۱ = ۱ \text{ یعنی } ۱ = \frac{۱}{۱} (۱ - ۱) \text{ پس } \frac{۱}{۱ + ۱ + ۱} = \frac{۱}{۱}$$

$$\text{فرلا} = \frac{۱}{۱} \text{فرلا} = \frac{۱}{۱} \text{فرما}$$

اس لیے  $\text{ک} \frac{۱}{۱ + ۱ + ۱} \text{فرلا} = \text{ک} \frac{۱}{۱} \frac{۱}{۱} \text{فرما} = \frac{۱}{۱} \text{ک} \frac{۱}{۱} \text{فرما}$

$$= \frac{۱}{۱} \text{ک} ۱ + \text{ک} = \frac{۱}{۱} \text{ک} (۱ + ۱) + \text{ک}$$

مثال ۳ -  $\frac{۱}{۱ + ۱ + ۱ + ۱ + ۱}$  کو تکمل کرو۔ 'ب' ج مستقل ہیں۔

اس کسر میں ہمیں دیکھتے ہی معلوم ہوتا ہے کہ شمار کنندہ 'نسب نما کا تفرقی' ہے



مثال ۵-  $\frac{1}{18+11+2}$  کو تکمیل کرو۔

معیاری شکلوں کو دیکھنے سے ظاہر ہے کہ اگر شکل جلد اس طرح کا ہو کہ

$\frac{1}{(متغیر)^2 \pm (مستقل)^2}$  تو ہم اس کا تکملہ فوراً لکھ سکتے ہیں۔ پس ہم یہ کوشش کرتے ہیں کہ جلد  $18+11+2$  کو اس شکل میں لائیں۔ اس کے لیے پہلے  $18+11$  کو لے کر کامل مربع بنالینا کافی ہے۔ اس طرح

$$18+11+2 = (9-18) + (3+11) + 9 = 18+11+2$$

پھر اگر ہم رکھیں

$$3+11=14, 14-1=13, \frac{1}{13} = \frac{1}{13} \text{ فرما}$$

$$\text{تو } \frac{1}{18+11+2} = \frac{1}{13} \text{ فرما}$$

$$= \frac{1}{13} \text{ فرما}$$

$$= \frac{1}{13} \text{ مس} + \frac{1}{13} \text{ ک}$$

$$= \frac{1}{13} \text{ مس} + \left( \frac{3+11}{13} \right) \text{ ک}$$

مثال ۶-  $\frac{1}{18+11+2}$  کو تکمیل کرو 'ا' 'ب' 'ج' کوئی مستقل میں

معیاری شکلوں سے معلوم ہے کہ  $\frac{1}{(متغیر)^2 \pm (مستقل)^2}$  کی شکل کے جلوں کے تکملے ہم فوراً لکھ سکتے ہیں۔ پس ہماری کوشش ہوتی ہے کہ دیے ہوئے جلوں کو اس قسم کے کسی جلد میں تبدیل کریں۔ پھر اس کی دو صورتیں

پیدا ہوتی ہیں ایک وہ جس میں ۱ ثابت ہو اور دوسری وہ صورت جس میں ۱ منفی ہو۔ ہم عددی مثالوں کے ذریعہ ان دونوں صورتوں میں طرزِ عمل کو واضح کرینگے۔

$$\text{صورت اول} - \frac{1}{\sqrt{34 + 116 - 209}}$$

اب جملہ ۹-۱۱۶+۳۴ کو ہم اس طرح بدل سکتے ہیں کہ

$$\{ \frac{34}{9} + (11\frac{2}{3} - 20\frac{1}{9}) \} 9 = (\frac{34}{9} + 11\frac{2}{3} - 20\frac{1}{9}) 9 = 34 + 116 - 209$$

ہم چاہتے ہیں کہ چھوٹی قوسوں کے اندرونی جملہ کو کامل مربع بنائیں، پس

$$\{ \frac{34}{9} + \frac{1}{9} - (1\frac{1}{9} + 11\frac{2}{3} - 20\frac{1}{9}) \} 9 = 34 + 116 - 209$$

$$\{ 4 + (\frac{1}{9} - 11) \} 9 =$$

$$\frac{1}{9} + 4 = 11 \text{ یعنی } 4 = 11 - \frac{1}{9}$$

$$\text{تو } \frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} = 1 \text{ اور فرلا} = \text{فرما}$$

اس لیے

$$\text{فرلا} \frac{1}{\sqrt{34 + 116 - 209}} \int \frac{1}{x} = \text{فرلا} \frac{1}{\sqrt{34 + 116 - 209}} \int$$

$$\text{فرلا} \frac{1}{\sqrt{34 + 116 - 209}} \int \frac{1}{x} =$$

$$+ \{ (\sqrt{34 + 116 - 209}) + 4 \} \frac{1}{9} =$$

$$+ \{ (\sqrt{34 + 116 - 209}) + (\frac{1}{9} - 11) \} \frac{1}{9} =$$

$$\text{صورت دوم} - \frac{1}{\sqrt{34 + 116 - 209}}$$

جملہ ۲۲۱ - ۷۲۰ - ۲۵ کو میاری شکل میں لانے کے لیے اس طرح تبدیل کر سکتے ہیں کہ

$$\left\{ \left( \frac{۲}{۵} + ۷ \right) - \frac{۲۲۱}{۲۵} \right\} ۲۵ = \left( \frac{۲}{۵} - ۷ - \frac{۲۲۱}{۲۵} \right) ۲۵ = ۲۵ - ۷۲۰ - ۲۲۱$$

اب ہم چاہتے ہیں کہ چھوٹی قوتوں کے اندرونی جملہ کو کامل مربع بنائیں اس لیے

$$\left\{ \frac{۲}{۲۵} + \left( \frac{۲}{۲۵} + ۷ \frac{۲}{۵} + ۷ \right) - \frac{۲۲۱}{۲۵} \right\} ۲۵ = ۲۵ - ۷۲۰ - ۲۲۱$$

$$\left\{ \left( \frac{۲}{۵} + ۷ \right) - ۹ \right\} ۲۵ = \left\{ \left( \frac{۲}{۵} + ۷ \right) - \frac{۲۲۵}{۲۵} \right\} ۲۵ =$$

اب رکھو  $۷ + \frac{۲}{۵} = ۷$  یا یعنی  $۷ - ۶ = \frac{۲}{۵}$  تو  $\frac{۲}{۵} = ۱$  ' فرلا = فرلا

$$\text{پس } \frac{۱}{۲۵ - ۷۲۰ - ۲۲۱} = \text{فرلا} = \frac{۱}{\left( \frac{۲}{۵} + ۷ \right) - ۹} \sqrt{\frac{۱}{۵}} = \text{فرلا}$$

$$\frac{۱}{۲۵ - ۹} \sqrt{\frac{۱}{۵}} = \text{فرلا}$$

$$\frac{۱}{۵} \text{ جب } \frac{۲}{۳} + ۷ = ۱ \text{ ک} = \frac{۱}{۵} \text{ جب } \frac{۲}{۳} + ۷ = ۱ \text{ ک}$$

غرض ہم دیکھتے ہیں کہ اگر تکمیل کوئی دوسرے درجہ کا جملہ یا اس کی قوت

$\frac{۱}{۴}$  یا اس کی قوت  $-\frac{۱}{۴}$  یا اس کی قوت  $-۱$  ہو یعنی اگر  $۷ + ۷ + ۷ = ۱$  یا  $۷ + ۷ + ۷ = ۱$  تو  $\frac{۱}{۴}$  یا  $-\frac{۱}{۴}$  کو ہمیشہ تکمیل کیا جاسکتا ہے۔

مثال ۷ - بعض اوقات ایک سے زیادہ مرتبہ متغیر کو بدلنا پڑتا ہے۔

اس کی مثال کے طور پر فرض کرو کہ ہم جملہ  $\frac{۷}{۲ + ۷۲ + ۷۷}$  کو تکمیل کرنا

چاہتے ہیں۔

اس جملہ میں ہم دیکھتے ہیں کہ شمار کنندہ 'نسب ناما کا کامل تفرقی سر

نہیں ہے۔ لیکن نسب ناما میں صرف ۷ کی جنت قوتیں داخل ہیں کوئی

طاق قوت نہیں ہے اس لیے متغیر کو بدل کر  $۷ = ۷$  مارکھتے ہیں جس سے ملتا ہے



$$\frac{\frac{14}{3} - 11}{5 + 11\sqrt{3} - 11\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{8} = \frac{(2 - 11\sqrt{3}) \cdot \frac{3}{8}}{5 + 11\sqrt{3} - 11\sqrt{3}} = \frac{2 - 11\sqrt{3}}{5 + 11\sqrt{3} - 11\sqrt{3}}$$

$$\frac{(\frac{14}{3} - 2) + (2 - 11\sqrt{3})}{5 + 11\sqrt{3} - 11\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{8} =$$

$$(1) \frac{1}{5 + 11\sqrt{3} - 11\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} - \frac{2 - 11\sqrt{3}}{5 + 11\sqrt{3} - 11\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{8} =$$

اب بائیں طرف کے پہلے جملہ کو ہم فوراً تکمیل کر سکتے ہیں کیونکہ اگر  
ف (۱۱) =  $5 + 11\sqrt{3} - 11\sqrt{3}$  رکھیں تو یہ جملہ  $\frac{3}{8}$  { ف (۱۱) } ف (۱۱) ہے  
جو مثال (۲) میں بتلائے ہوئے طریقہ سے حل ہو سکتا ہے۔ پس

$$\frac{1 + \frac{1}{2} (5 + 11\sqrt{3} - 11\sqrt{3})}{1 + \frac{1}{2} -} \cdot \frac{3}{8} = 0 \text{ فرما } \frac{2 - 11\sqrt{3}}{5 + 11\sqrt{3} - 11\sqrt{3}} \int \frac{3}{8}$$

$$(2) \frac{1}{5 + 11\sqrt{3} - 11\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{8} =$$

مساوات (۱) میں بائیں طرف کے دوسرے جملہ کو تکمیل کرنے کے  
لیے جملہ  $5 + 11\sqrt{3} - 11\sqrt{3}$  کو تبدیل کرنا چاہیے اس لیے

$$\left\{ \frac{5}{8} + (11 - 11\sqrt{3}) \right\} \cdot \frac{3}{8} = \left( \frac{5}{8} + 11 - 11\sqrt{3} \right) \cdot \frac{3}{8} = 5 + 11\sqrt{3} - 11\sqrt{3}$$

$$\left\{ 1 + \left( \frac{1}{2} - 11 \right) \right\} \cdot \frac{3}{8} = \left\{ 1 + \left( \frac{1}{8} + 11 - 11\sqrt{3} \right) \right\} \cdot \frac{3}{8} =$$

پس اگر رکھا جائے  $11 - 11\sqrt{3} = 11$  فرما = فرلا تو حاصل ہوتا ہے کہ

$$(1) \frac{1}{(1 + 11\sqrt{3} - 11\sqrt{3})} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{1 + 11\sqrt{3} - 11\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 0 \text{ فرما } \frac{1}{5 + 11\sqrt{3} - 11\sqrt{3}} \int \frac{1}{2}$$

$$(2) \left\{ 1 + \left( \frac{1}{2} - 11 \right) \right\} \cdot \frac{1}{2} =$$

بالآخر (۲) اور (۳) کو (۱) میں رکھنے سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$ک + \left\{ \frac{1}{1 + 11\sqrt{3} - 11\sqrt{3}} + \frac{1}{2} - 11 \right\} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2 - 11\sqrt{3}}{5 + 11\sqrt{3} - 11\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{8} \text{ فرما } \frac{2 - 11\sqrt{3}}{5 + 11\sqrt{3} - 11\sqrt{3}}$$

مثال ۹۔ جم ن ط کو تکمیل کرو جہاں ن کوئی مثبت منفی صحیح یا کسری عدد ہے۔ اس کو معیاری شکل میں لانے کے لیے ظاہر ہے کہ حسب ذیل ابدال کرنا چاہیے:

$$\begin{aligned} م = ن ط & \quad ط = \frac{1}{ن} م & \quad م = \frac{فرط}{فرع} & \quad \frac{1}{ن} = فرط & \quad \frac{1}{ن} = فرع \\ پس & \quad جم ن ط فرط = \frac{1}{ن} جم م فرع = جب م + ک \\ & \quad = \frac{جب ن ط}{ن} + ک \end{aligned}$$

جب ن ط، م ن ط، وغیرہ دوسری مثلثی نسبتوں کو بھی اسی طرح تکمیل کیا جاسکتا ہے۔

مثال ۱۰۔ جب ط کو تکمیل کرو۔  
اب تک ہم کو مثلثی تفاعل کی قوتوں کو تکمیل کرنے کا قاعدہ معلوم نہیں۔ لیکن گذشتہ مثال میں ہم نے دیکھا ہے کہ ضعیفی زاویوں کے مثلثی تفاعل کو کس طرح تکمیل کیا جاسکتا ہے۔ پس ہماری یہ کوشش ہوتی ہے کہ کسی مثلثی تفاعل کی قوت کو ضعیفی زاویہ کے تفاعل کے طور پر بیان کیا جائے۔ ہمیں معلوم ہے کہ

$$\begin{aligned} ۱۔ جم ۲ ط & = ۲ جب ۲ ط پس جب ۲ ط = \frac{1}{۴} (۱۔ جم ۲ ط) \\ اس لیے & \quad جم ۲ ط فرط = \frac{1}{۴} (۱۔ جم ۲ ط) فرط \\ یعنی & \quad جم ۲ ط فرط = \frac{1}{۴} فرط - \frac{1}{۴} جم ۲ ط فرط \end{aligned}$$

$\frac{1}{۴} ط - \frac{1}{۴} ط = \frac{1}{۴} ط$  جب ۲ ط + ک (گذشتہ مثال میں ن = ۲ رکھنے سے) اسی طرح اگر جب ۲ ط کو تکمیل کرنا ہو تو اس کو جب ۲ ط اور جب ۲ ط کی رقوم میں بیان کر سکتے ہیں۔

$$جب ۲ ط = (جب ۲ ط) = \frac{1}{۴} (۱۔ جم ۲ ط + جم ۲ ط) = \frac{1}{۴} (۱۔ جم ۲ ط + جم ۲ ط)$$



لیکن

$$۱ + \text{جم } ۲ ط = \text{جم } ۲ ط$$

$$\text{پس } \frac{۱}{۲} = \text{جب } ط = \{ ۱ - \text{جم } ۲ ط + \frac{۱ + \text{جم } ۲ ط}{۲} \}$$

$$= \frac{۳}{۸} - \frac{۱}{۴} \text{ جم } ۲ ط + \frac{۱}{۸} \text{ جم } ۲ ط$$

$$\text{اس لیے } ۱ \text{ جب } ط \text{ فرط} = ۱ \left( \frac{۳}{۸} - \frac{۱}{۴} \text{ جم } ۲ ط + \frac{۱}{۸} \text{ جم } ۲ ط \right) \text{ فرط}$$

$$= \frac{۳}{۸} ط - \frac{۱}{۲} \text{ جب } ط + \frac{۱}{۸} \text{ جب } ط + ک$$

اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ جب ط یا جم ط کی جنت قوتوں کو تکمل کیا جاسکتا ہے اگرچہ بڑی قوتوں کے لیے یہ عمل بہت طویل ہو جاتا ہے۔

مثال ۱۱ - اس مثال میں ہم جب ط اور جم ط کی طاق قوتوں کو تکمل کرنے کا قاعدہ بتلائیے گے۔ فرض کرو کہ ہم جم ط کو تکمل کرنا چاہتے ہیں۔ اس کو یوں لکھ سکتے ہیں:

$$\text{جم } ط = \text{جم } ط \text{ جم } ط = (\text{جم } ط) \text{ جم } ط$$

$$= (۱ - \text{جب } ط) \text{ جم } ط = (۱ - ۲ \text{ جب } ط + \text{جب } ط) \text{ جم } ط$$

$$\text{پس } ۱ \text{ جم } ط \text{ فرط} = ۱ \text{ جم } ط \text{ فرط} - ۲ \text{ جب } ط \text{ جم } ط \text{ فرط} + ۱ \text{ جب } ط \text{ جم } ط \text{ فرط}$$

بائیں طرف کے جملہ کو تکمل کرنے کے لیے ذیل کی تبدیلی کرو:

$$لا = \text{جب } ط، \frac{\text{فرط}}{\text{فرط}} = \text{جم } ط، \text{فرط} = \text{جم } ط \text{ فرط}$$

$$\text{پس } ۱ \text{ جم } ط \text{ فرط} = ۱ \text{ فرط} - ۲ \text{ لا فرط} + ۱ \text{ لا فرط}$$

$$= لا - ۲ \frac{\text{لا}}{۳} + \frac{\text{لا}}{۳} + ک$$

$$= \text{جب } ط - \frac{۲}{۳} \text{ جب } ط + \frac{۱}{۳} \text{ جب } ط + ک$$

مذکورہ بالا مثالوں سے متغیر کو تبدیل کرنے کا قاعدہ بخوبی ذہن نشین ہو گیا ہوگا۔ اب ہم اس کا ایک ثبوت دینگے جو اگرچہ بالکل باضابطہ نہیں ہے لیکن موجودہ مسئلہ پر طالب علم کی ضرورت کے لیے کافی ہے۔  
فرض کرو کہ ہم تفاعل و = ف (لا) کو مکمل کرنا چاہتے ہیں اور اس کو معیاری شکل میں لانے کے لیے لاکھی بجائے ایک نیا متغیر ع حسب ذیل رشتہ کی مدد سے داخل کرتے ہیں :-  
$$\text{لا} = \text{فہ} (ع) \cdot \frac{\text{فرء}}{\text{فرء}} = \text{فہ} (ع)$$

فرض کرو کہ  
$$Y = f (لا) \text{ فرلا} \text{ یعنی } \frac{\text{فری}}{\text{فرء}} = \text{ف} (لا) = \text{و}$$
  
تو چونکہ 'ی' لا کا ایک تفاعل ہے اور اوپر کے تغیر کے باعث 'لا' کا ایک تفاعل ہے اس لیے 'ی' بھی ع کا تفاعل ہوگا اور اس لیے تفاعل کے تفاعل کو تفرق کرنے کے قاعدہ سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{\text{فری}}{\text{فرء}} = \frac{\text{فری}}{\text{فرء}} \cdot \frac{\text{فرلا}}{\text{فرء}} = \text{و} \cdot \frac{\text{فرلا}}{\text{فرء}}$$
  
جس میں و اور  $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرء}}$  دونوں کو نئے متغیر ع کی رقوم میں بیان کرنا چاہیے  
پس  
$$Y = f \text{ و } \frac{\text{فرلا}}{\text{فرء}}$$

یعنی  $f (لا) \text{ فرلا} = f \{ \text{فہ} (ع) \} \text{ فہ} (ع) \text{ فرء}$   
جو متغیر کی تبدیلی کا مطلوبہ قاعدہ ہے جس کو ہم نے گذشتہ مثالوں میں استعمال کیا ہے۔ طالب علم کو چاہیے کہ ایک غیر معینہ تکملہ میں آخری جواب ہمیشہ ابتدائی متغیر یعنی لاکھی رقوم میں بیان کرے اگرچہ اصلی عمل تکمل متغیر ع کی مدد سے کیا گیا ہو۔

## مشقی سوالات ۲۳

ذیل کے تفاعلوں کو تکمل کرو :-

$$\frac{1}{\sqrt[3]{u-1}-2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{u}+1} \quad (3)$$

$$\frac{1+u^2}{1-\sqrt[3]{u}} \quad (4)$$

$$\frac{2+u^2}{\sqrt[3]{u}+u^2-19} \quad (8)$$

$$\frac{u-1}{3-u^2-12} \quad (10)$$

$$\frac{1+u^2}{\sqrt[3]{u^9+u^3}} \quad (12)$$

$$(10-u^2+u^3-12)(u-1) \quad (14)$$

$$\frac{مس^1 u}{\sqrt[3]{u}+1} \quad (16)$$

$$جب^1 ط \quad (18)$$

$$جب^2 ط \quad (20)$$

$$\frac{\sqrt[3]{u}}{1-u^2} \quad (1)$$

$$\frac{u-1}{\sqrt[3]{u}+u-1} \quad (3)$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{u}-u} \quad (5)$$

$$\frac{\sqrt[3]{u}}{5+\sqrt[3]{u^2}-12} \quad (7)$$

$$\frac{3-u^2}{5-\sqrt[3]{u^2}-12} \quad (9)$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{u^2}-u^2+12} \quad (11)$$

$$(u^2-1)(u^2+u+1) \quad (13)$$

$$\frac{لوک u}{u} \quad (15)$$

$$جب^3 ط \quad (17)$$

$$جم^1 ط \quad (19)$$

$$جم^2 ط \quad (21)$$

۴۵ - تکمیل بالخصوص :-

اکثر تفاعل جن کو تکمیل کرنے کی ہمیں ضرورت ہوتی ہے بطا ہر نہ تو معیاری شکل کے ہوتے ہیں نہ انہیں کسی آسان استحالہ (تبدیلی) کی مدد سے معیاری شکل میں لایا جاسکتا ہے۔ ایسے تفاعل اگر دو سادہ قسم کے تفاعلوں کا حاصل ضرب ہوں تو ان کو ذیل کے قاعدہ کی مدد سے معیاری

شکل میں لا کر تکمل کیا جاسکتا ہے۔

فرض کرو کہ ی اور و متغیر لا کے دو تفاعل ہیں۔ تو دو تفاعلوں کے حاصل ضرب کو تفرق کرنے کے قاعدہ سے ہمیں معلوم ہے کہ

$$\frac{ف}{فلا} (ی و) = ی \frac{ف}{فلا} + و \frac{ف}{فلا}$$

اس مساوات کے دونوں طرف تکمل کرنے سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$ی و = ی \frac{ف}{فلا} + و \frac{ف}{فلا}$$

اس لیے  $ی \frac{ف}{فلا} = ی و - و \frac{ف}{فلا}$  (۱)

اب فرض کرو کہ ی = ف (۱) ،  $\frac{ف}{فلا} = ف (۲)$

تو  $و = ی \frac{ف}{فلا} - ف (۱) \frac{ف}{فلا} = ف (۲) - ف (۱) \frac{ف}{فلا}$  ان قیمتوں کو مساوات (۱) میں رکھنے سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$ف (۲) - ف (۱) \frac{ف}{فلا} = ف (۱) \frac{ف}{فلا} - ف (۱) \frac{ف}{فلا}$$

-  $ف (۲) - ف (۱) \frac{ف}{فلا} = ف (۱) \frac{ف}{فلا} - ف (۱) \frac{ف}{فلا}$  (۲).....

اکثر دو تفاعلوں کے حاصل ضرب میں ایک تفاعل ایسا ہوتا ہے کہ

اس کا تکمل معیاری شکلوں سے ہمیں معلوم ہے۔ نیز ایک تفاعل کا تفرقی سر اور دوسرے تفاعل کا تکمل ضرب کھا کر اکثر معیاری شکل میں آ جاتے ہیں۔ اس طرح ہمیں دونوں کے حاصل ضرب کا تکمل آسانی سے مل جاتا ہے۔ اس عمل کو تکمل بالحصص کہتے ہیں۔

اس عمل میں دو امور قابل غور ہیں۔ دو تفاعل ف (۱) اور ف (۲) دیے ہوئے ہوں تو پہلے یہ دیکھنا چاہیے کہ دونوں میں سے کس تفاعل کو



اس لیے کسی کو بھی  $\frac{فرو}{فولا}$  رکھا جاسکتا ہے لیکن اگر بالفرض  $\frac{فرو}{فولا} = ۱$  رکھیں تو

$و = ۱$  لا فلا  $= \frac{لا}{۱}$  ہوتا ہے اور اس لیے  $و$   $\frac{فرو}{فولا} = ۱$  جب لا فلا  
جو ظاہر ہے کہ ابتدائی تکملہ  $و$  لا جب لا فلا کی بہ نسبت زیادہ پیچیدہ ہے۔  
اس سے معلوم ہوتا ہے کہ  $ی = لا$  اور  $\frac{فرو}{فولا} = ۱$  جب لا رکھنا ضروری ہے  
اب  $و = ۱$  جب لا فلا  $= -$  جم لا اور  $\frac{فرو}{فولا} = ۱$   
پس

لا جب لا فلا  $= -$  لا جم لا -  $و$  (جم لا) فلا  $= -$  لا جم لا + جم لا فلا  
 $= -$  لا جم لا + جب لا + ک

مثال (۲) - لا فلا کو تکمیل کرو :-

ایسے تفاعل کو تکمیل کرنے کے لیے جن میں ف (لا)  $= لا$  جہاں  
ن کوئی مثبت صحیح عدد ہے اور ف (لا)  $=$  جب لا یا جم لا یا لا ہو ہمیشہ  
 $ی = لا$  اور  $\frac{فرو}{فولا} = ۱$  جب لا یا جم لا یا لا لینا چاہیے تاکہ آخری  
تکملے پہلے کی بہ نسبت زیادہ آسان ہوتے چلے جائیں۔ پس موجودہ مثال میں

$ی = لا$  ،  $\frac{فرو}{فولا} = ۱$  ،  $و = ۱$  ،  $\frac{فرو}{فولا} = ۱$  ،  $۲ = لا$

اس لیے  $و$  لا فلا  $= لا$  فلا -  $۲$  لا فلا

اسی طرح  $و$  لا فلا  $= لا$  فلا -  $و$  لا فلا  $= لا$  فلا -  $و$

پس  $و$  لا فلا  $= لا$  فلا -  $۲$  لا فلا +  $۲$  لا فلا + ک

مثال (۳) - لا جب لا کو تکمیل کرو :-

اس مثال میں  $و$  لا جب لا میں سے کسی تفاعل کو  $ی$  اور دوسرے

کو  $\frac{فرو}{فولا}$  سے تکمیل کریں۔ پس

$ی = لا$  ،  $\frac{فرو}{فولا} = ۱$  ، جب لا  $= -$  جم لا ،  $\frac{فرو}{فولا} = ۱$  ،  $و$

اس لیے  $\text{ا} \text{و} \text{ا} \text{ج} \text{ب} \text{لا} \text{فر} \text{لا} = - \text{و} \text{ا} \text{ج} \text{م} \text{لا} + \text{ا} \text{و} \text{لا} \text{ج} \text{م} \text{لا} \text{فر} \text{لا}$   
 نیز اسی طرح  $\text{و} \text{ا} \text{ج} \text{م} \text{لا} \text{کو} \text{تکمل} \text{بالخصص} \text{کرنے سے جبکہ} \text{ی} = \text{و} \text{لا} \text{اور} \text{فر} \text{لا} = \text{ج} \text{م} \text{لا}$   
 رکھیں، حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{ا} \text{و} \text{لا} \text{ج} \text{م} \text{لا} \text{فر} \text{لا} = \text{و} \text{ا} \text{ج} \text{ب} \text{لا} - \text{ا} \text{و} \text{لا} \text{ج} \text{ب} \text{لا} \text{فر} \text{لا}$$

پس  $\text{ا} \text{و} \text{لا} \text{ج} \text{ب} \text{لا} \text{فر} \text{لا} = - \text{و} \text{لا} \text{ج} \text{م} \text{لا} + \text{و} \text{ا} \text{ج} \text{ب} \text{لا} - \text{ا} \text{و} \text{لا} \text{ج} \text{ب} \text{لا} \text{فر} \text{لا}$   
 ہم دیکھتے ہیں جب ہم  $\text{و} \text{ا} \text{ج} \text{ب} \text{لا} \text{کو} \text{تکمل} \text{بالخصص} \text{کرتے ہیں تو بائیں طرف بھی}$   
 پھر وہی ابتدائی تکرار حاصل ہوتا ہے۔ اس کو یہ دھڑے طرف لے جانے سے فوراً قیمت  
 مل جاتی ہے

$$\text{ا} \text{و} \text{لا} \text{ج} \text{ب} \text{لا} \text{فر} \text{لا} = \text{و} \text{ا} \text{ج} \text{ب} \text{لا} - \text{ج} \text{م} \text{لا}$$

$$\text{ا} \text{و} \text{لا} \text{ج} \text{ب} \text{لا} \text{فر} \text{لا} = \frac{\text{و} \text{ا} \text{ج} \text{ب} \text{لا}}{\text{پ}} - \text{ج} \text{م} \text{لا} + \text{ک}$$

اگر اس قیمت کو ہم  $\text{و} \text{ا} \text{ج} \text{م} \text{لا} \text{کے} \text{تکملہ} \text{میں} \text{رکھیں} \text{تو} \text{حاصل} \text{ہوتا} \text{ہے}$

$$\text{ا} \text{و} \text{لا} \text{ج} \text{م} \text{لا} \text{فر} \text{لا} = \text{و} \text{ا} \text{ج} \text{ب} \text{لا} - \frac{\text{و} \text{ا} \text{ج} \text{ب} \text{لا}}{\text{پ}} - \text{ج} \text{م} \text{لا} + \text{ک}$$

$$= \frac{\text{و} \text{ا} \text{ج} \text{ب} \text{لا} + \text{ج} \text{م} \text{لا}}{\text{پ}} + \text{ک}$$

مثال (۴) لوک لا کو تکمل کرو:-

اس طرح کے تفاعلوں کو تکمل بالخصص کرنے کے لیے ہم دیکھتے ہیں کہ  
 اگرچہ لوک لا دو تفاعلوں کا حاصل ضرب نہیں ہے لیکن ہم فرض کر سکتے ہیں کہ  
 دوسرا تفاعل ا ہے یعنی دیا ہوا تفاعل دراصل  $\text{ا} \times \text{لوک} \text{لا} \text{ہے جس کے}$   
 لیے ہم رکھتے ہیں

$$\text{ی} = \text{لوک} \text{لا} \text{،} \text{فر} \text{لا} = \text{ا} \text{،} \text{و} = \text{لا} \text{،} \text{فر} \text{ی} = \frac{\text{ا}}{\text{پ}}$$

پس  $\int \text{لوک لا فلا} = \int 1 \times \text{لوک لا فلا} = \text{لوک لا} - \int \text{لا} \times \frac{1}{\text{لا}} \text{ فلا}$   
 $= \text{لوک لا} - \int \text{لا} = \text{لوک لا} - \text{لا} + \text{ک}$   
 مثال (۵) حجم لا جب لا کو تکمیل کرو۔

$$\int \text{جم لا جب لا فلا} = \int \text{جم لا جب لا} \text{ جم لا فلا}$$

$$= \frac{1}{3} \text{جم لا جب لا} + \frac{2}{3} \int \text{جم لا جب لا جب لا فلا}$$

$$= \frac{1}{3} \text{جم لا جب لا} + \frac{2}{3} \int \text{جم لا جب لا} (1 - \text{جم لا}) \text{ فلا}$$

پس  $(1 + \frac{2}{3}) \int \text{جم لا جب لا فلا} = \frac{1}{3} \text{جم لا جب لا} + \frac{2}{3} \int \text{جم لا جب لا فلا}$

یعنی  $\int \text{جم لا جب لا فلا} = \frac{1}{5} \text{جم لا جب لا} + \frac{2}{5} \int \text{جم لا جب لا فلا}$

$$= \frac{1}{5} \text{جم لا جب لا} + \frac{2}{3 \times 5} \int \text{جم لا جب لا}$$

$$= \frac{1}{5} \text{جم لا جب لا} + \frac{2}{3 \times 5} (1 - \text{جم لا}) \text{ جب لا}$$

$$= \frac{1}{5} \text{جم لا جب لا} - \frac{2}{3 \times 5} \text{جم لا جب لا} + \frac{2}{3 \times 5} \text{جب لا}$$

مثال (۶) حجم لا جب لا کو تکمیل کرو۔

$$\int \text{جم لا جب لا فلا} = \int \text{جم لا جب لا} \text{ جم لا فلا}$$

$$= \text{جم لا جب لا} + \frac{2}{5} \int \text{جم لا جب لا جب لا فلا}$$

$$= \frac{1}{5} \text{جم لا جب لا} + \frac{2}{5} \int \text{جم لا جب لا} (1 - \text{جم لا}) \text{ فلا}$$

پس  $(1 + \frac{2}{5}) \int \text{جم لا جب لا فلا} = \frac{1}{5} \text{جم لا جب لا} + \frac{2}{5} \int \text{جم لا جب لا فلا}$

یعنی  $\int \text{جم لا جب لا فلا} = \frac{1}{9} \text{جم لا جب لا} + \frac{2}{9} \int \text{جم لا جب لا فلا} (1)$



جس سے معلوم ہوتا ہے کہ حجم لا جب لا کا تکملہ معلوم کرنے کے لیے حجم لا جب لا کا تکملہ معلوم کرنا کافی ہے یعنی حجم لا کی قوت بقدر ۲ کے کم ہو جاتی ہے۔

لیکن  $\{ \text{حجم لا جب لا فرلا} = \{ \text{جب لا حجم لا جب لا فرلا}$

$$= - \frac{1}{2} \{ \text{جب لا حجم لا} + \frac{1}{2} \{ \text{جب لا حجم لا حجم لا فرلا}$$

$$= - \frac{1}{2} \{ \text{جب لا حجم لا} + \frac{1}{2} \{ \text{جب لا حجم لا} \{ \text{جب لا} \{ \text{جب لا فرلا}$$

$$\text{پس } (1 + \frac{3}{2}) \{ \text{حجم لا جب لا فرلا} = - \frac{1}{2} \{ \text{حجم لا جب لا} + \frac{1}{2} \{ \text{حجم لا جب لا فرلا}$$

$$\text{یعنی } \{ \text{حجم لا جب لا فرلا} = - \frac{1}{2} \{ \text{حجم لا جب لا} + \frac{1}{2} \{ \text{حجم لا جب لا فرلا} \quad (2)$$

جس سے معلوم ہوتا ہے کہ حجم لا جب لا کا تکملہ معلوم کرنے کے لیے حجم لا جب لا کا تکملہ معلوم کرنا کافی ہے یعنی جب لا کی قوت بقدر ۲ کے کم ہو جاتی ہے۔ (۱) میں (۲) سے قیمت درج کرنے پر حاصل ہوتا ہے کہ

$$\{ \text{حجم لا جب لا فرلا} = \frac{1}{9} \{ \text{حجم لا جب لا} - \frac{2}{2 \times 4} \{ \text{حجم لا جب لا} + \frac{3 \times 2}{2 \times 4} \{ \text{حجم لا جب لا فرلا} \quad (3)$$

اس آخری مساوات سے ظاہر ہے کہ حجم لا جب لا کا تکملہ معلوم کرنے کے لیے حجم لا جب لا کا تکملہ معلوم کرنا کافی ہے یعنی حجم لا اور جب لا دونوں کی قوتیں بقدر ۲ کے کم ہو جاتی ہیں۔

لیکن مثال ۵ کی بنا پر چونکہ ہمیں  $\{ \text{حجم لا جب لا فرلا}$  کی قیمت معلوم ہے اس لیے حجم لا جب لا کا تکملہ بالکل معلوم ہو جاتا ہے۔

مثال (۴) حجم لا جب لا کو تکمل کر دو جہاں ن اور م کوئی مثبت

صحیح عدد ہیں۔

اس تفاعل کو بھی ہم ایک تحویلی ضابطہ کی مدد سے تکمل کر سکتے ہیں یعنی ہماری کوشش ہوتی ہے کہ م اور ن کو بتدریج بقدر ۲ کے کم کرتے جائیں۔ چونکہ

$$\text{جم}^1 \text{ لا جب}^1 \text{ لا} = \text{جم}^1 \text{ لا}^1 \text{ لا} (\text{جب}^1 \text{ لا})$$

اس لیے مکمل باحصص کے ضابطہ کو استعمال کرنے کی غرض سے ہم رکھتے ہیں

$$\text{می} = \text{جم}^1 \text{ لا}^1 \text{ لا} = \frac{\text{فر}^1}{\text{لا}} = \text{جب}^1 \text{ لا} \text{ جم}^1 \text{ لا} = \text{و} = \frac{\text{جب}^1 \text{ لا}^1 \text{ لا}}{1 + \text{م}}$$

$$\text{پس} \text{جم}^1 \text{ لا} = \text{جم}^1 \text{ لا} \text{ جب}^1 \text{ لا} \text{ فر}^1$$

$$= \text{جم}^1 \text{ لا}^1 \text{ لا} (\text{جب}^1 \text{ لا}) \text{ فر}^1$$

$$= \text{جم}^1 \text{ لا}^1 \text{ لا} \text{ جب}^1 \text{ لا}^1 \text{ لا} + \frac{1 - \text{ن}}{1 + \text{م}} \text{جم}^1 \text{ لا}^1 \text{ لا} \text{ جب}^1 \text{ لا}^1 \text{ لا} \text{ فر}^1$$

$$= \text{جم}^1 \text{ لا}^1 \text{ لا} \text{ جب}^1 \text{ لا}^1 \text{ لا} + \frac{1 - \text{ن}}{1 + \text{م}} \text{جم}^1 \text{ لا}^1 \text{ لا} \text{ جب}^1 \text{ لا}^1 \text{ لا} (\text{جم}^1 \text{ لا}) \text{ فر}^1$$

$$= \text{جم}^1 \text{ لا}^1 \text{ لا} \text{ جب}^1 \text{ لا}^1 \text{ لا} + \frac{1 - \text{ن}}{1 + \text{م}} \text{جم}^1 \text{ لا}^1 \text{ لا} \text{ جب}^1 \text{ لا}^1 \text{ لا} - \frac{1 - \text{ن}}{1 + \text{م}} \text{جم}^1 \text{ لا}^1 \text{ لا} \text{ جب}^1 \text{ لا}^1 \text{ لا}$$

$$\text{یعنی} \text{جم}^1 \text{ لا}^1 \text{ لا} = \left\{ \frac{1 - \text{ن}}{1 + \text{م}} + 1 \right\} \text{جم}^1 \text{ لا}^1 \text{ لا} + \frac{1 - \text{ن}}{1 + \text{م}} \text{جم}^1 \text{ لا}^1 \text{ لا} \text{ جب}^1 \text{ لا}^1 \text{ لا}$$

$$\text{پس} \text{جم}^1 \text{ لا}^1 \text{ لا} = \frac{1}{\text{ن} + \text{م}} \text{جم}^1 \text{ لا}^1 \text{ لا} \text{ جب}^1 \text{ لا}^1 \text{ لا} + \frac{1 - \text{ن}}{\text{ن} + \text{م}} \text{جم}^1 \text{ لا}^1 \text{ لا} \text{ جب}^1 \text{ لا}^1 \text{ لا} \quad (۱)$$

تحویلی ضابطہ (۱) میں ہم دیکھتے ہیں کہ جم لا کی قوت ن بقدر ۲ کے کم ہو گئی ہے لیکن جب لا کی قوت م وہی ہے جو پہلے تھی۔ لیکن ہم اس کو بھی کم کر سکتے ہیں:

$$\text{ن} - \text{جم}^1 \text{ لا}^1 \text{ لا} = \text{جم}^1 \text{ لا}^1 \text{ لا} \text{ جب}^1 \text{ لا}^1 \text{ لا} \text{ فر}^1 = \text{جم}^1 \text{ لا}^1 \text{ لا} \text{ جب}^1 \text{ لا}^1 \text{ لا} (\text{جم}^1 \text{ لا} \text{ لا} \text{ جب}^1 \text{ لا}^1 \text{ لا}) \text{ فر}^1$$

$$= \text{جم}^1 \text{ لا}^1 \text{ لا} \text{ جب}^1 \text{ لا}^1 \text{ لا} + \frac{1 - \text{م}}{1 - \text{ن}} \text{جم}^1 \text{ لا}^1 \text{ لا} \text{ جب}^1 \text{ لا}^1 \text{ لا} \text{ فر}^1$$

$$= -\frac{1}{n-1} \text{ حجم } 1^1 \text{ لا جب } 1^2 \text{ لا } + \frac{1-m}{1-n} \int \text{ حجم } 2^2 \text{ لا جب } 2^3 \text{ لا } (1-\text{جب } 2^4 \text{ لا})$$

$$= -\frac{1}{n-1} \text{ حجم } 1^1 \text{ لا جب } 1^2 \text{ لا } + \frac{1-m}{1-n} \text{ حجم } 2^2 \text{ لا جب } 2^3 \text{ لا } - \frac{1-m}{1-n} \text{ حجم } 3^3 \text{ لا جب } 3^4 \text{ لا } + \dots$$

$$\text{پس } \frac{1}{n-1} = -\frac{\text{حجم } 1^1 \text{ لا جب } 1^2 \text{ لا}}{2-m+n} + \frac{1-m}{2-m+n} \text{ حجم } 2^2 \text{ لا جب } 2^3 \text{ لا} \quad (2)$$

ضابطہ (۲) کو ضابطہ (۱) میں درج کرنے پر حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{1}{n-1} = \frac{1}{n+m-2} \text{ حجم } 1^1 \text{ لا جب } 1^2 \text{ لا} - \frac{1}{n+m-2} \text{ حجم } 2^2 \text{ لا جب } 2^3 \text{ لا} + \dots$$

$$(3) \quad \frac{(1-m)(1-n)}{(2-m+n)(m+n)} + \dots$$

چونکہ ضابطہ (۳)  $n$  اور  $m$  کی ہر قیمت کے لیے صحیح ہے اس لیے  $n$  کی بجائے

$n-2$  اور  $m$  کی بجائے  $m-2$  رکھنے سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\frac{1}{n-2} = \frac{1}{n+m-4} \text{ حجم } 1^1 \text{ لا جب } 1^2 \text{ لا} - \frac{1}{n+m-4} \text{ حجم } 2^2 \text{ لا جب } 2^3 \text{ لا} + \dots$$

$$+ \frac{(3-m)(3-n)}{(4-m+n)(m-2)} + \dots$$

$$\frac{1}{n-2} = \frac{1}{n+m-4} \text{ حجم } 1^1 \text{ لا جب } 1^2 \text{ لا} - \frac{1}{n+m-4} \text{ حجم } 2^2 \text{ لا جب } 2^3 \text{ لا} + \dots \quad \text{پس}$$

$$+ \frac{1}{n+m-4} \text{ حجم } 3^3 \text{ لا جب } 3^4 \text{ لا} - \frac{1}{n+m-4} \text{ حجم } 4^4 \text{ لا جب } 4^5 \text{ لا} + \dots$$

$$- \frac{1}{n+m-4} \text{ حجم } 5^5 \text{ لا جب } 5^6 \text{ لا} + \dots$$

$$+ \frac{(3-m)(1-n)(3-n)(1-n)}{(4-m+n)(2-m+n)(2-m+n)(m-2)} + \dots$$

غرض ہم دیکھتے ہیں کہ ہر تکلیف باحصہ کے بعد ن اور م دونوں بقدر ۲ کے کم ہو جاتے ہیں۔ اب چار صورتیں پیش آتی ہیں :-

صورت اول - ن طاق ' م طاق ' ن + م جفت .

اس صورت میں آخری تکملہ  $\text{عج} = \text{ک جم لا فرلا} = \text{ج ب لا}$  اور آخری رقم حسب ذیل ہوگی :-

$$(۴) \text{ آخری رقم} = \frac{(۱-ن)(۳-ن)۲ \times ۲ \times \dots (۵-ن) ۲ \times ۲ \times \dots (۱-م)(۳-م)}{۲ \times ۲ \times ۶ \times \dots (۲-م+ن)(۲-م+ن)(۲-م+ن)} \text{ جب لا}$$

صورت دوم - ن طاق ' م جفت ' ن + م طاق

آخری تکملہ  $\text{عج} = \text{ک جم لا فرلا} = \text{ج ب لا}$  اور آخری رقم حسب ذیل ہوگی :-

$$(۵) \text{ آخری رقم} = \frac{(۱-ن)(۳-ن)۲ \times ۲ \times \dots (۳-م)(۱-م)}{۱ \times ۳ \times ۵ \times \dots (۲-م+ن)(۲-م+ن)(۲-م+ن)} \text{ جب لا}$$

صورت سوم - ن جفت ' م طاق ' ن + م طاق

آخری تکملہ  $\text{عج} = \text{ک ج لا فرلا} = \text{ک ج لا فرلا} = \text{ج م لا}$  اور آخری رقم حسب ذیل ہوگی :-

$$(۶) \text{ آخری رقم} = \frac{(۱-ن)(۳-ن)۱ \times ۳ \times \dots (۳-م)(۱-م)}{۱ \times ۳ \times ۵ \times \dots (۲-م+ن)(۲-م+ن)(۲-م+ن)} \text{ جم لا}$$

صورت چہارم - ن جفت ' م جفت ' ن + م جفت

آخری تکملہ  $\text{عج} = \text{ک فرلا} = \text{لا}$  اور آخری رقم حسب ذیل ہوگی :-

$$(۷) \text{ آخری رقم} = \frac{(۱-ن)(۳-ن)۱ \times ۳ \times \dots (۳-م)(۱-م)}{۲ \times ۲ \times ۶ \times \dots (۲-م+ن)(۲-م+ن)(۲-م+ن)} \text{ لا}$$

ن اور م کی قیمتوں کو کم کرتے وقت یہ خیال رکھنا چاہیے کہ اگر ن کی قیمت م سے پہلے ختم ہو جائے تو پھر ضابطہ (۲) کی مدد سے ن کی اس آخری قیمت

کو مستقل رکھ کر م کی قیمتوں کو کم کرنا چاہیے۔ اس کے برخلاف اگر م کی قیمت پہلے ختم ہو جائے تو ضابطہ (۱) کی مدد سے م کی اس آخری قیمت کو مستقل رکھ کر ن کی قیمتوں کو کم کرنا چاہیے یہاں تک کہ مذکورہ بالا چار صورتوں میں سے کوئی صورت حاصل ہو جائے۔

اگر صرف  $\text{م}$  جمع لا فرلا معلوم کرنا ہو تو اوپر کی مثال میں  $\text{م} = ۰$  رکھو اور اگر صرف  $\text{ن}$  جب لا فرلا معلوم کرنا ہو تو  $\text{ن} = ۰$  رکھو اور اس طرح عمل کرو کہ قوتیں بقدر ۲ کے کم ہوتی جائیں۔

## مشقی سوالات ۲۴

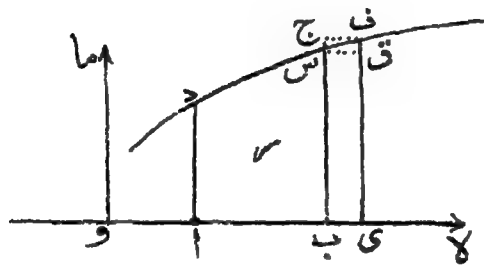
ذیل کے تفاعلوں کو مکمل کرو :-

- |                  |                   |                    |
|------------------|-------------------|--------------------|
| (۱) لا جب ۲ لا   | (۲) لا جم لا      | (۳) لا ۲ تو        |
| (۴) لا جم ۲ لا   | (۵) لا (لوک لا) ۲ | (۶) تو جب ۲ لا     |
| (۷) تو ۲ جم لا   | (۸) تو ۲ جم لا    | (۹) تو جب لا جم لا |
| (۱۰) مس لا       | (۱۱) لا جب لا     | (۱۲) لا مس لا      |
| (۱۳) جب لا       | (۱۴) جب لا        | (۱۵) جم لا         |
| (۱۶) جم لا       | (۱۷) جب لا جم لا  | (۱۸) جب لا جم لا   |
| (۱۹) جب لا جم لا | (۲۰) جب لا جم لا  |                    |

# معین تکملہ ۵۵۵

## ۵۵۵: تکملہ کی ہندسی تعبیر۔

فرض کرو کہ ایک دیے ہوئے تفاعل  $ما = ف (لا)$  کی ترسیم دس ف منحنی میں کی گئی ہے اور  $وا = ا$ ،  $وب = لا$ ،  $بی = مف$  لا



فاصلے محور لا پر لیے گئے ہیں اور نقاط 'ا'، 'ب'، 'ج'، 'ف' کے معین 'ا'، 'ب'، 'س'، 'ی'، 'ف' کیسے گئے ہیں ف ج محور لا کے متوازی کھینچا گیا ہے جو ب س محدودہ کو نقطہ 'ج' پر قطع کرتا ہے۔ اسی طرح س ق محور لا کے متوازی کھینچا گیا ہے جو ی ف (محدودہ بشرط ضرورت) کو ق پر قطع کرتا ہے۔ تب

$$س ق = ج ف = بی = مف لا ؛$$

نقطہ 'ا' کا مقام معین ہے کیونکہ 'ا' پر لا = ا سے لیکن ب کو ہم جہاں چاہیں لے سکتے ہیں اور اس کے ساتھ ی کا مقام بھی بدلے گا۔

اب رقبہ 'ا' ب س د پر غور کرو جو معین مستقیم خطوں 'ا' ب، 'ا' د، 'ب' س سے اور ایک منحنی خط د س سے گھرا ہوا ہے۔ اس رقبہ کو اگر ہم س سے تعبیر کریں تو ظاہر ہے کہ نقطہ 'ب' یعنی لا کو بدلنے سے

یہ رقبہ بھی بدلیگا پس سر بتغیر لا کا ایک تفاعل ہوگا۔  
 بی کو ہم نے ایک چھوٹا فاصلہ مف لا لیا ہے اس لیے رقبہ  
 بی ف میں بھی ایک چھوٹا رقبہ ہوگا جس کو مف سر سے تعبیر کر سکتے  
 ہیں۔ اب چونکہ

$$\text{وب} = \text{لا اس لیے ب س} = \text{ف (لا) وی} = \text{لا + مف لا}$$

$$\text{بی ف} = \text{ف (لا + مف لا)}$$

اب شکل سے ظاہر ہے کہ

مستطیل بی ق س > رقبہ بی ف س > مستطیل بی ف ج

یعنی ب س × بی > مف سر > بی ف × بی

یعنی ف (لا) مف لا > مف سر > ف (لا + مف لا) مف لا

اس رشتے میں اگر س رقبوں کو مف لا سے تقسیم کیا جائے تو حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{ف (لا)} > \frac{\text{مف سر}}{\text{مف لا}} > \text{ف (لا + مف لا)} \quad (۱)$$

رشتہ (۱) سے معلوم ہوتا ہے کہ رقبہ سر کے بدلنے کی اوسط شرح  
 ب س اور بی ف کے درمیان کسی عدد کے مساوی ہوتی ہے اب مف لا کی  
 چاہے کچھ ہی قیمت لی جائے یہ رشتہ قائم رہتا ہے۔

اگر مف لا کو بہت چھوٹا کرتے جائیں تو ف (لا + مف لا) کی قیمت  
 ف (لا) کی قیمت کے قریب آتی جاتی ہے یعنی اگر نقطہ بی کو نقطہ ب کے  
 بہت قریب لائیں تو بی ف کی قیمت ب س کے قریب آتی ہے۔ لیکن

اس صورت میں بھی  $\frac{\text{مف سر}}{\text{مف لا}}$  کی قیمت بی ف اور ب س کے درمیان

رہتی ہے۔ پس آخر چونکہ بی ف کی انتہا ب س ہے اس لیے  $\frac{\text{مف سر}}{\text{مف لا}}$   
 کی انتہا بھی ب س ہوگی۔

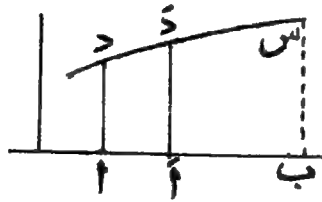
لہذا  $\frac{\text{مفت سر}}{\text{مفت لا}} = \text{ب س} = \text{ف (لا)}$

یعنی  $\frac{\text{فر س}}{\text{فر لا}} = \text{ف (لا)}$  (۲)

یعنی رقبہ سر (ا ب س) متغیر لا کا وہ تفاعل ہے جس کا تفرقی سر دیے ہوئے تفاعل ف (لا) کے مساوی ہے۔ اس لیے غیر معین تکمل کی تعریف کی بنا پر

(۳)  $\text{س} = \text{ف (لا) فر لا} + \text{ک}$   
جہاں ک تکمل کا اختیاری مستقل ہے۔

اس سے معلوم ہوتا ہے کہ تفاعل ف (لا) کا غیر معین تکمل اس رقبہ کو تعبیر کرتا ہے جو کسی ایک نقطہ ا (لا = ۱) سے کسی متبادل نقطہ ب (لا) تک مستحی اور محور لا کے درمیان محصور ہو۔ نقطہ ا کو بدلنے کا اثر سوائے اس کے کچھ نہیں ہے کہ مستقل ک کی قیمت بدل جائے۔ مثلاً اگر ہم رقبہ کو



نقطہ ا: (لا = ۱) سے ناپیں تو

$\text{س} = \text{رقبہ ا ب س د} = \text{رقبہ ا ب س د} - \text{رقبہ ا ا د د}$

$= \text{ف (لا) فر لا} + \text{ک} - \text{رقبہ ا ا د د}$

$= \text{ف (لا) فر لا} + \text{ک}$



جہاں ک = ک - رقبہ ا ا د د بھی ایک مستقل ہے کیونکہ ا ا د د مستقل رقبہ ہے۔

## ۵۲۔ ۵۱۔ معین تکمیل کی تعریف

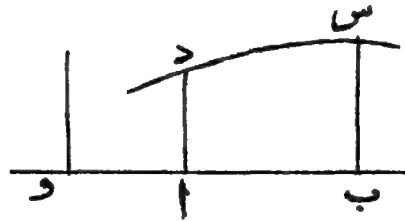
فرض کرو کہ اختیاری مستقل ک کو شامل کیے بغیر تفاعل ف (لا) کا غیر معین تکمیل فا (لا) ہے

یعنی  $\text{فا (لا)} = \text{ک} + \text{ف (لا) فلا}$  (۱)

اس قیمت کو گزشتہ دفعہ ۵۱ دہ کے رشتہ (۳) میں رکھنے پر حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{ک} = \text{فا (لا)} + \text{ک}$$

جہاں ہم رقبہ سر کو نقطہ ا (و = ۱) سے ناپتے ہیں۔



مستقل ک کی قیمت معلوم کرنے کے لیے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر نقطہ ب کو نقطہ ا پر منطبق کیا جائے یعنی اگر لا = ۱ رکھا جائے تو بجائے رقبہ ا ب س د کے صرف ایک ہی خط ا د حاصل ہوتا ہے یعنی سر کی قیمت صفر ہو جاتی ہے۔ پس مساوات (۲) میں لا = ۱ رکھنے پر ملتا ہے کہ

$$\text{ک} = \text{فا (و)} + \text{ک} \quad \text{یعنی ک} = - \text{فا (و)} \quad (۳)$$

پس

(۴) سر = فا (لا) - فا (ل)

ضابطہ (۴) سے ہم کو وہ قاعدہ معلوم ہوتا ہے کہ کسی ثابت نقطہ ا سے ایک متغیر نقطہ ب تک رقبہ کس طرح معلوم کیا جائے۔

اب اگر نقطہ ب کو بھی ہم ثابت کر دیں اور فاصلہ وب = ب ہو تو رقبہ ا ب س د ایک معین رقبہ ہوتا ہے جس کی قیمت مساوات (۴) میں لا = ب رکھنے سے حاصل ہوتی ہے :-

(۵) رقبہ ا ب س د = فا (ب) - فا (ل)

مساوات (۴) سے تعبیر ہونے والی قیمت کو بالعموم

(۶) ر ف (لا) فرلا = فا (لا) - فا (ل)  
اور مساوات (۵) سے تعبیر ہونے والے جملہ کو

(۷) ر ف (لا) فرلا = فا (ب) - فا (ل)

کہتے ہیں۔ جملہ (۷) میں چونکہ ل اور ب دونوں نقطے معین ہیں اس لیے ر ف (لا) فرلا کو "ف (لا) کا معین تکملہ" کہتے ہیں جو نقطہ لا = ل سے نقطہ لا = ب تک لیا جاتا ہے۔ ل کو تکمل کی "سفلی حد" اور ب کو تکمل کی "علوی حد" کہتے ہیں اگر ب < ل یعنی اگر نقطہ ب نقطہ ا کی سیدھی جانب واقع ہو۔

جملہ (۷) سے معین تکملہ کے معلوم کرنے کا قاعدہ یہ حاصل ہوتا ہے کہ ل سے ب تک ف (لا) کا معین تکملہ = غیر معین تکملہ کی قیمت نقطہ لا = ب پر۔ غیر معین تکملہ کی قیمت نقطہ لا = ل پر۔

اس عمل کو یوں بھی کہتے ہیں کہ اگر ر ف (لا) فرلا = فا (لا) تو

(۸) ر ف (لا) فرلا = [فا (لا) - فا (ب)]

۵۳، ۵۴ - ذیل کی مثالوں سے اس عمل کی بخوبی توضیح ہو جائیگی :-

مثال (۱)  $\int \frac{1}{x} dx$  لا فرلا کی قیمت معلوم کرو :-

ہمیں معلوم ہے کہ  $\int \frac{1}{x} dx = \ln x$  پس

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x = \left[ \frac{1}{x} \right]_1^{25} = \left\{ \frac{1}{25} - \frac{1}{1} \right\} = \left( \frac{1}{25} - 1 \right) = \frac{1 - 25}{25} = \frac{-24}{25} = -\frac{24}{25}$$

مثال (۲)  $\int \frac{1}{x^2} dx$  لا فرلا کی قیمت معلوم کرو :-

چونکہ  $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^1} = -\frac{1}{1+1} x^{-1} = -\frac{1}{2} x^{-2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2}$

پس  $\left\{ -\frac{1}{2} (2)^{-2} - \left( -\frac{1}{2} (1)^{-2} \right) \right\} = \left[ -\frac{1}{2} \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right] = \left[ -\frac{1}{8} + \frac{4}{8} \right] = \frac{3}{8}$

$$\left( -\frac{1}{2} \right) \frac{3}{8} = \left[ \left\{ -\frac{1}{2} (2)^{-2} \right\} - \left\{ -\frac{1}{2} (1)^{-2} \right\} \right] \frac{3}{8} =$$

مثال (۳)  $\int \frac{1}{x^3} dx$  لا فرلا کی قیمت معلوم کرو :-

چونکہ  $\int \frac{1}{x^3} dx = -\frac{1}{2x^2} = -\frac{1}{2} x^{-2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{x^2}$

پس  $\left\{ -\frac{1}{2} (1)^{-2} - \left( -\frac{1}{2} (1)^{-2} \right) \right\} = \left[ -\frac{1}{2} \frac{1}{1} + \frac{1}{2} \right] = \left[ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right] = 0$

$$= \left\{ -\frac{1}{2} (1)^{-2} - \left( -\frac{1}{2} (1)^{-2} \right) \right\} \frac{1}{2} =$$

مثال (۴)  $\int \frac{1}{x^4} dx$  لا فرلا کی قیمت معلوم کرو :-

$$\begin{aligned} \text{چونکہ } \int \text{جم لا فلا} &= \text{جب لا} \\ \text{پس } \int \text{جم لا فلا} &= [\text{جب لا}] \\ &= \text{جب لا} - \text{جب لا} \end{aligned}$$

$$\text{مثال (۵) } \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب لا فلا کی قیمت معلوم کرو:۔}$$

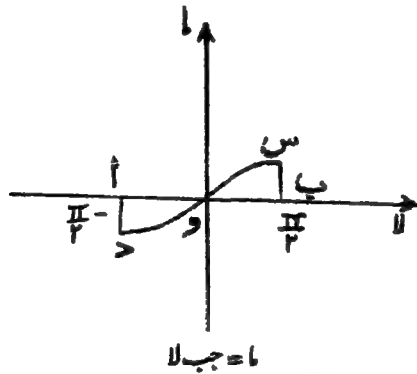
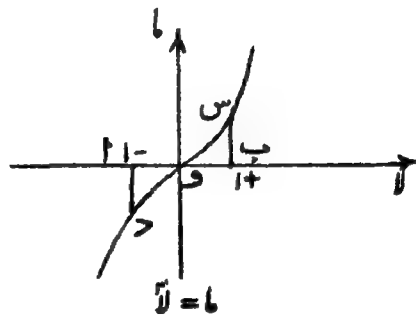
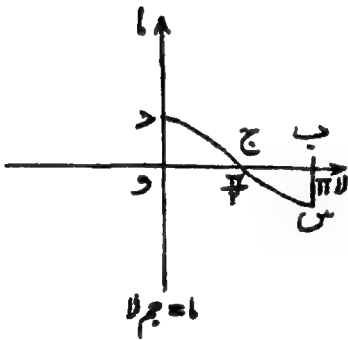
$$\begin{aligned} \text{چونکہ } \int \text{جب لا فلا} &= - \text{جم لا} \\ \text{پس } \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \text{جب لا فلا} &= [- \text{جم لا}]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

$$= - \left\{ \text{جم } \frac{\pi}{2} - \text{جم } \left( \frac{\pi}{4} \right) \right\}$$

$$= - \{ 0 - 0 \}$$

مثلاً ۳ تا ۵ میں ہم دیکھتے ہیں کہ معین تکملہ کی قیمت صفر ہے لیکن تعریف کے بموجب معین تکملہ ایک رقبہ ہوتا ہے اور طالب علم کو یہاں حیرت ہوگی کہ ایک رقبہ کس طرح صفر ہو سکتا ہے جب تک کہ کوئی ایک ضلع صفر نہ ہو۔ اس امر کی توضیح کے لیے ہم بتانا چاہتے ہیں کہ کسی رقبہ کی بھی ایک علامت اسی طرح ہوتی ہے جس طرح ایک خط کی علامت مثبت یا منفی ہو سکتی ہے۔ جو رقبہ محور لا کے نیچے واقع ہونگے ان کی علامت منفی ہوگی اور جو رقبہ محور لا کے اوپر واقع ہونگے ان کی علامت مثبت ہوگی کیونکہ پہلی صورت میں تفاعل کی قیمت یعنی معین ما کی قیمت منفی ہوتی ہے اور دوسری صورت میں تفاعل کی قیمت مثبت ہوتی ہے اور

رقبہ تفاعل کی اس قیمت یعنی معین  $\lambda$  کو ایک مثبت فاصلہ یعنی  $\lambda = 1$  سے لے کر  $\lambda = 0$  تک فاصلہ سے ضرب دینے پر حاصل ہوتا ہے۔  
وضاحت کی خاطر فرض کرو کہ امثلہ ۲ تا ۵ کے معین تکملوں سے تعبیر ہونے والے رقبوں کو شکل میں تعبیر کرتے ہیں۔



ان تینوں شکلوں میں ہم دیکھتے ہیں کہ ان میں سے ہر رقبہ اب اس دوسراوی حصوں میں تقسیم ہوتا ہے جن میں سے ایک حصہ محور  $\lambda$  سے اوپر اور دوسرا محور  $\lambda$  کے نیچے واقع ہوتا ہے، یعنی ایک حصہ مثبت اور دوسرا منفی ہوتا ہے۔ پس ان دونوں حصوں کا جبری مجموعہ صفر ہے اور اس لیے مطلوبہ معین تکملہ کی قیمت بھی صفر ہے۔  
یہ بھی ظاہر ہے کہ اگر کسی تفاعل کے رقبہ کا پورا یا زیادہ حصہ

محولہ لا کے نیچے واقع ہو تو رقبہ منفی حاصل ہوگا یعنی معین تکملہ کی قیمت منفی بھی حاصل ہو سکتی ہے۔

مثال (۶)  $\frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}$  فرلا کو تکمل کرو۔

$$\text{چونکہ } \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6$$

$$\text{اس لیے } \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \left[ \frac{1}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\frac{1}{3}} \right] = \left[ 2 - 3 \right] = -1$$

مثال (۷)  $\frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}$  جم لا جب لا فرلا کی قیمت معلوم کرو۔۔

دفعہ ۳، ۴ کی مثال (۵) میں ہم نے دیکھا ہے کہ

$$\left[ \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} \right] \text{ جم لا جب لا فرلا} = \frac{1}{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\frac{1}{3}} = 2 - 3 = -1$$

اس تکملہ کی پہلی دو رقموں میں جم لا اور جب لا دونوں شامل ہیں۔

جزو جم لا کی موجودگی کی وجہ سے حد  $\frac{1}{2}$  پر اور جزو جب لا کی موجودگی کی

وجہ سے حد ۰ پر یہ رقمیں صفر ہو جاتی ہیں، مثلاً

$$\left[ \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} \right] \text{ جم لا جب لا} = \left\{ \left( \frac{1}{2} \right) \text{ جم} - \left( \frac{1}{3} \right) \text{ جب} \right\} = \left\{ 2 - 3 \right\} = -1$$

$$\left[ \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} \right] \text{ جم لا جب لا} = \left\{ \left( \frac{1}{2} \right) \text{ جم} - \left( \frac{1}{3} \right) \text{ جب} \right\} = \left\{ 2 - 3 \right\} = -1$$

اگر آخری رقم کو انہی حدود پر لیا جائے تو حاصل ہوتا ہے

$$\left[ \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} \right] \text{ جم لا جب لا} = \left\{ \left( \frac{1}{2} \right) \text{ جم} - \left( \frac{1}{3} \right) \text{ جب} \right\} = \left\{ 2 - 3 \right\} = -1$$

$$\frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = -1$$

پس  $\frac{\pi}{15} = \frac{\pi}{3 \times 5} = \frac{\pi}{15}$  حجم لا جب لا فلا

مثال (۸)  $\frac{\pi}{15}$  حجم لا جب لا فلا کی قیمت معلوم کرو جہاں م اور ن کوئی مثبت صحیح عدد ہیں۔

اس سوال میں ن اور م کے طاق یا جفت ہونے کے لحاظ سے چار صورتیں پیش آتی ہیں۔

(۱) اگر ن اور م دونوں طاق ہیں تو دفعہ ۳ و ۵ کی مثال ۸ مساوات (۲) سے معلوم ہے کہ

$$\frac{\pi}{15} \text{ حجم لا جب لا فلا} = \frac{1}{ن+م} \text{ حجم لا جب لا} - \frac{1}{ن+م} \frac{1-ن}{۲-م+ن} \text{ حجم لا جب لا}$$

$$+ \dots + \frac{(۱-ن)(۲-ن)۲ \times ۴ \times \dots (۳-م)(۱-م)۲ \times ۴ \times \dots (۳-۲)}{(ن+م)(۳-م+ن)(۲-م+ن)۲ \times ۴ \times \dots}$$

چونکہ آخری رقم کے سوا باقی تمام رقموں میں جب لا اور حجم لا دونوں شامل ہیں اس لیے حدود ۰ اور  $\frac{\pi}{۱۵}$  پر یہ تمام رقמים صفر ہو جائیں گی اور صرف آخری رقم رہ جائیگی۔ نیز

$$\left[ \frac{(۱-ن)(۲-ن)۲ \times ۴ \times \dots (۳-م)(۱-م)۲ \times ۴ \times \dots (۳-۲)}{(ن+م)(۳-م+ن)(۲-م+ن)۲ \times ۴ \times \dots} \text{ جب لا} \right] \frac{\pi}{۱۵}$$

$$\left\{ \text{جب لا} - \frac{۲ \times \dots (۱-م) ۲ \times ۴ \times \dots (۳-ن)(۱-ن)}{۲ \times ۴ \times \dots (۲-م+ن)(ن+م)} \right\} =$$

$$1 \times \frac{۲ \times \dots (۱-م) ۲ \times \dots (۳-ن)(۱-ن)}{۲ \times ۴ \times \dots (۲-م+ن)(ن+م)} =$$

پس اگر ن اور م دونوں طاق ہوں تو

$$(۱) \quad \frac{\pi}{15} \text{ حجم لا جب لا فلا} = 1 \times \frac{۲ \times \dots (۱-م) ۲ \times \dots (۱-ن)}{۲ \times ۴ \times \dots (۲-م+ن)(ن+م)}$$

اسی طرح باقی تمام صورتوں میں بھی آخری رقم کے سوا باقی سب رقמים دونوں حدود ۰ اور  $\frac{\pi}{۱۵}$  پر صفر ہو جائیں گی اس لیے صرف آخری رقموں کی قیمت

معلوم کر لینا کافی ہے۔  
 (ب) اگر  $n$  طاق اور  $m$  جفت ہو تو دفعہ ۴ رو کی مثال ۸ مساوات (۵) سے ظاہر ہے کہ

$$\left\{ \frac{1 \times 3 \times \dots (2-m)(1-m) 2 \times \dots (2-n)(1-n)}{1 \times 3 \times 5 \times \dots (2-m+n)(m+n)} \right\}^{\frac{n}{2}} \left\{ \frac{1 \times 3 \times \dots (1-m) 2 \times \dots (1-n)}{1 \times 3 \times \dots (2-m+n)(m+n)} \right\}^{\frac{m}{2}} = \dots$$

پس اگر  $n$  طاق اور  $m$  جفت ہو تو

آجمن لا جب لا فرلا =  $\frac{1 \times 3 \times \dots (2-m)(1-m) 2 \times \dots (2-n)(1-n)}{1 \times 3 \times 5 \times \dots (2-m+n)(m+n)}$  (۶)  
 (ج) اگر  $n$  جفت اور  $m$  طاق ہو تو دفعہ ۴ رو کی مثال ۸ مساوات (۵) سے ظاہر ہے کہ

$$\left\{ \frac{2 \times 4 \times \dots (1-m) 1 \times 3 \times \dots (1-n)}{1 \times 3 \times 5 \times \dots (2-m+n)(m+n)} \right\}^{\frac{n}{2}} \left\{ \frac{2 \times 4 \times \dots (1-m) 1 \times 3 \times \dots (1-n)}{1 \times 3 \times 5 \times \dots (2-m+n)(m+n)} \right\}^{\frac{m}{2}} = \dots$$

پس اگر  $n$  جفت اور  $m$  طاق ہو تو

آجمن لا جب لا فرلا =  $\frac{2 \times 4 \times \dots (2-m)(1-m) 1 \times 3 \times \dots (2-n)(1-n)}{1 \times 3 \times 5 \times \dots (2-m+n)(m+n)}$  (۷)  
 (د) اگر  $n$  اور  $m$  دونوں جفت ہوں تو دفعہ ۴ رو کی مثال ۸ مساوات (۵) سے معلوم ہے کہ

$$\left\{ \frac{1 \times 3 \times \dots (1-m) 1 \times 3 \times \dots (1-n)}{2 \times 4 \times \dots (2-m+n)(m+n)} \right\}^{\frac{n}{2}} \left\{ \frac{1 \times 3 \times \dots (1-m) 1 \times 3 \times \dots (1-n)}{2 \times 4 \times \dots (2-m+n)(m+n)} \right\}^{\frac{m}{2}} = \dots$$



پس اگر  $n$  اور  $m$  دونوں جفت ہوں تو

$$\frac{\pi}{2} \times \frac{1 \times 3 \times \dots (3-m)(1-m) \times 3 \times \dots (3-n)(1-n)}{2 \times 4 \times 6 \times \dots (2-m)(2-n)} = \frac{\pi}{2} \times \frac{(n+1)(m+1)}{(n-m+1)}$$

صرف اس صورت میں جبکہ  $n$  اور  $m$  دونوں جفت ہوں آخری عدد  $\frac{\pi}{2}$  حاصل ہوتا ہے ورنہ باقی تمام صورتوں میں آخری حاصل ضرب ۱ ہوتا ہے۔  
حسب ذیل عددی مثالوں سے یہ قاعدے بخوبی واضح ہونگے:-

$$\frac{1}{120} = 1 \times \frac{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 \times 12}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 \times 12} = \frac{\pi}{2} \times \frac{(n+1)(m+1)}{(n-m+1)}$$

$$\frac{8}{492} = 1 \times \frac{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \times 11}{3 \times 5 \times 7 \times 9 \times 11} = \frac{\pi}{2} \times \frac{(n+1)(m+1)}{(n-m+1)}$$

$$\frac{384}{328200} = \frac{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 \times 12 \times 14 \times 16 \times 18 \times 20}{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \times 11 \times 13 \times 15 \times 17 \times 19} = \frac{\pi}{2} \times \frac{(n+1)(m+1)}{(n-m+1)}$$

$$\frac{\pi}{2} \times \frac{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \times 11 \times 13 \times 15 \times 17 \times 19}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 \times 12 \times 14 \times 16 \times 18 \times 20} = \frac{\pi}{2} \times \frac{(n+1)(m+1)}{(n-m+1)}$$

مثلاً ۸ اور ۹ کے نتیجوں کی نظری اور عملی ریاضی میں اکثر ضرورت پڑتی ہے طالب علم کو چاہیے کہ ان نتائج کو بخوبی ذہن نشین کر لے۔

## مشقی سوالات ۲۵

حسب ذیل معین تکملوں کی قیمت دریافت کرو:-

$$(1) \int_1^2 \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} - \frac{1}{x^6} + \frac{1}{x^7} - \frac{1}{x^8} + \frac{1}{x^9} - \frac{1}{x^{10}} \right) dx$$

$$(2) \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx$$

$$(3) \int_1^2 \frac{1}{x^3} dx$$

$$(4) \int_1^2 \frac{1}{x^4} dx$$

$$(5) \int_1^2 \frac{1}{x^5} dx$$

$$\begin{aligned}
 (۷) \quad \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{13}{2}} \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{1025-1020-221}} \quad (۸) \quad \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1-\text{لا}}{\sqrt{\text{لا}+\text{لا}-1}} \text{فرلا} \\
 (۹) \quad \int_{\frac{1}{2}}^{\pi} \text{جب}^2 \text{لا فرلا} \quad (۱۰) \quad \int_{\frac{1}{2}}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\text{لا}+5}} \text{جب}^2 \text{لا فرلا} \\
 (۱۱) \quad \int_{\frac{1}{2}}^{\pi} \text{جب}^2 \text{لا فرلا} \quad (۱۲) \quad \int_{\frac{1}{2}}^{\pi} \text{جب}^2 \text{لا فرلا} \\
 (۱۳) \quad \int_{\frac{1}{2}}^{\pi} \text{جب}^2 \text{لا فرلا} \quad (۱۴) \quad \int_{\frac{1}{2}}^{\pi} \text{جب}^2 \text{لا فرلا} \\
 (۱۵) \quad \int_{\frac{1}{2}}^{\pi} \text{جب}^2 \text{لا فرلا} \quad (۱۶) \quad \int_{\frac{1}{2}}^{\pi} \text{جب}^2 \text{لا فرلا}
 \end{aligned}$$

## ۵۶۔ معین تکملہ میں متغیر کی تبدیلی :-

دفعہ ۵۳ میں جب ہم نے غیر معین تکملہ میں متغیر کی تبدیلی کا قاعدہ بیان کیا تھا تو اُسی کے ساتھ یہ بھی ذکر کیا تھا کہ جب کبھی ایک غیر معین تکملہ میں متغیر کو لائے گا میں تبدیل کیا جائے تو آخری جواب بیان کرتے وقت پھر معکوس تبدیلی کے ذریعہ ماکولا میں تبدیل کرنا چاہیے۔

لیکن معین تکملہ چونکہ لایا یا کسی کا تفاعل نہیں ہے بلکہ ایک مستقل عدد ہے اس لیے اگر ہم تکمل کو بدلنے کے ساتھ تکمل کے حدود کو اور ب کو بھی بدل دیں تو جواب کو بالراست تبدیل شدہ متغیر کے ذریعہ حاصل کر سکتے ہیں پھر دوبارہ ابتدائی متغیر میں لانے کی ضرورت نہیں پڑتی۔

مثلاً فرض کرو کہ ہم کو آف (لا) فرلا معین تکملہ معلوم کرنا ہے

جہاں لا اور لا دو مستقل قیمتیں ہیں۔ شکمل ف (لا) کو معیاری شکل میں لانے کے لیے فرض کرو کہ ہم

$$(۱) \quad لا = فہ (ع) \quad 'فرلا = فہ (ع) \quad 'فرلا = فہ (ع) \quad فرہ (ع)$$

رکھتے ہیں۔ مساوات (۱) میں چونکہ لا اور ع ایک دوسرے پر منحصر ہیں اس لیے لا کی ہر قیمت کے جواب میں ع کی متناظر قیمت ملتی ہے یعنی

$$(۲) \quad لا = لا تو ع = ع \quad لا = لا تو ع = ع$$

$$\text{پس} \quad 'ف (لا) فرلا = 'ف (ع) فہ (ع) \quad فہ (ع) فرہ (ع)$$

$$\text{یعنی اگر سہ (ع) = ف (ع) فہ (ع) تو}$$

$$(۳) \quad 'ف (لا) فرلا = 'ف (ع) سہ (ع) فرہ (ع)$$

اس لیے آخری جواب معلوم کرنے کے لیے سہ (ع) کا معین تکملہ ع سے ع تک معلوم کر لینا کافی ہے۔ پھر دوبارہ لا میں تبدیل کرنے کی ضرورت نہیں۔ ذیل کی مثالوں سے یہ امر بخوبی واضح ہو جائیگا۔

$$\text{مثال (۱)} \quad 'ف (۱ + لا + ۱) فرلا کی قیمت معلوم کرو۔$$

$$\text{رکھو} \quad ۱ + لا + ۱ = ۱ + لا = ۱ \quad \text{یعنی} \quad لا = ۰ \quad (۱ - ۱)$$

$$\text{تو} \quad 'ف (۱ + لا + ۱) فرلا = 'ف (۱ + لا + ۱) فرلا = 'ف (۱ + لا + ۱) فرلا$$

$$\text{نیز} \quad لا = ۰ \quad تو \quad ۱ = ۱ \quad لا = ۱ \quad تو \quad ۱ + لا + ۱ = ۱ + ۱ + ۱ = ۳$$

$$\text{پس} \quad 'ف (۱ + لا + ۱) فرلا = 'ف (۱ + لا + ۱) فرلا = 'ف (۱ + لا + ۱) فرلا = 'ف (۱ + لا + ۱) فرلا$$

$$\left\{ \frac{1}{10}, \frac{25}{10} \right\} \frac{1}{10} = \left\{ \frac{1}{10} - \frac{25}{10} \right\} \frac{1}{10} =$$

مثال (۲) -  $\frac{1}{10} \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$  فلا کی قیمت معلوم کرو۔

$$\text{رکھو لا} = \text{مس ط} \quad \text{تب ط} = \text{مس لا}$$

$$\frac{\text{فلا}}{\text{فوط}} = \frac{\text{قط ط}}{\text{فلا}} = \text{قط ط} = \text{فلا}$$

$$\text{قط ط} = \sqrt{1 + \text{مس ط}} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

$$\text{لا} = 0 \quad \text{توط} = 0 \quad \text{لا} = 1 \quad \text{توط} = \frac{1}{10}$$

$$\text{پس } \frac{1}{10} \frac{1}{10} = \frac{1}{100} \text{ فلا} = \frac{\text{مس ط} \text{قط ط}}{\text{قط ط}}$$

$$\frac{1}{10} \frac{1}{10} = \text{مس ط} \text{قط ط} = \text{قط ط} = \text{فلا}$$

$$\text{قط ط} = \frac{1}{10} - \text{قط} = 0 \quad 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

مثال (۳) -  $\frac{1}{10} \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$  فلا کی قیمت معلوم کرو۔

$$\text{رکھو لا} = \text{ع} \quad \text{ع} = \text{لا} \quad \text{ع} = \text{لا} \quad \text{ع} = \text{لا}$$

$$\frac{\text{فلا}}{\text{فوع}} = \frac{\text{ع}}{\text{ع}} = \text{فلا} = \text{ع} = \text{فوع}$$

$$\text{لا} = 0 \quad \text{توع} = 0 \quad \text{لا} = 1 \quad \text{توع} = \frac{1}{10}$$

$$\text{پس } \frac{1}{10} \frac{1}{10} = \frac{1}{100} \text{ فلا} = \frac{\text{ع} \times \text{ع}}{\text{ع} + 1} = \frac{1}{100} \text{ فوع} = \frac{\text{ع}}{\text{ع} + 1}$$

$$\text{لیکن } \frac{1}{100} + \frac{1 - \text{ع}}{\text{ع} + 1} = \frac{1 + 1 - \text{ع}}{\text{ع} + 1} = \frac{\text{ع}}{\text{ع} + 1}$$

$$\frac{1}{100} + (1 - \text{ع}) =$$

پس  $\sqrt[3]{\frac{لا^3}{لا + 1}} = \sqrt[3]{\frac{لا^3}{لا + 1}}$  فرلا  $ر = \sqrt[3]{(ع - 1) (ر + ع + 1) \frac{1}{ع + 1}}$  فرع  $\frac{1}{ع + 1}$  فرع  
 $ر = \sqrt[3]{\left[ع - \frac{ع}{ع}\right] ر + \left[ع - \frac{ع}{ع}\right] ر} =$   
 $ر = \sqrt[3]{\left\{ر - \frac{ع}{ع}\right\} ر + \left\{ر - \frac{ع}{ع}\right\} ر} =$   
 اسی طرح اگر کسی معین تکملہ میں کئی مرتبہ متغیر کو تبدیل کرنے کی ضرورت پڑے تو ہر مرتبہ  
 تکمیل کے حدود کو بھی ساتھ ہی ساتھ بدلتے جانا چاہیے۔

### مشقی سوالات ۲۶

حب ذیل تکملوں کی قیمت معلوم کرو:-

- (۱)  $\sqrt[3]{\frac{لا^3}{لا - 5}}$  فرلا (۲)  $\sqrt[3]{\frac{فرلا}{لا - 5}}$
- (۳)  $\sqrt[3]{\frac{لا^3}{لا - 2}}$  فرلا (۴)  $\sqrt[3]{\frac{لا^3}{(لا - 1) (لا - 1)}}$  فرلا
- (۵)  $\sqrt[3]{\frac{لا^3}{لا + 1}}$  فرلا (۶)  $\sqrt[3]{\frac{فرلا}{لا + 1}}$
- (۷)  $\sqrt[3]{\frac{فرلا}{لا - 25}}$  فرلا (۸)  $\sqrt[3]{\frac{لا^3}{لا}}$  فرلا
- (۹)  $\sqrt[3]{\frac{لا^3}{لا - 19}}$  فرلا (۱۰)  $\sqrt[3]{\frac{لا^3}{لا - 19}}$  فرلا

### ۵۵۷ - مشقی ابدال -

اکثر تفاعلوں کو جن میں متغیر اصم مثلاً جذر المربع وغیرہ شامل ہوں تکمیل  
 کرنے کے لیے ایک بہت مفید اندکار آمد طریقہ یہ ہے کہ متغیر لا کو بدل مشقی تفاعل



$$\text{رکھو لا} = \text{اوس ط} = \frac{\text{فرلا}}{\text{قط}} = \text{اقط ط} = \text{فرلا} = \text{اقط ط} = \text{فرط}$$

$$\text{پس } \sqrt{\frac{\text{لا}}{\text{لا} + \text{لا}}} = \text{فرلا} = \frac{\text{اوس ط} \cdot \text{اقط ط}}{\text{اقط ط}} = \text{اوس ط} = \text{اقط ط} = \text{فرط}$$

$$= \text{اوس ط} \cdot \text{مس ط} = \text{اقط ط} = \text{فرط} = \text{اوس ط} \cdot \text{اقط ط} = \text{فرط}$$

$$= \frac{\text{اوس ط}}{\text{اوس ط}} - \frac{\text{اقط ط}}{\text{اوس ط}} + \text{ک}$$

$$= \frac{\text{اوس ط}}{\text{اوس ط}} - \frac{\text{اقط ط}}{\text{اوس ط}} + \text{ک} = \frac{\text{اوس ط}}{\text{اوس ط}} - \frac{\text{اقط ط}}{\text{اوس ط}} + \text{ک}$$

$$= \frac{\text{اوس ط}}{\text{اوس ط}} - \left\{ \frac{\text{اقط ط}}{\text{اوس ط}} + 1 \right\} + \text{ک} = \frac{\text{اوس ط}}{\text{اوس ط}} - \left\{ \frac{\text{اقط ط}}{\text{اوس ط}} + 1 \right\} + \text{ک}$$

$$= \frac{1}{\text{اوس ط}} - \frac{\text{اقط ط}}{\text{اوس ط}} + \text{ک} = \frac{1}{\text{اوس ط}} - \frac{\text{اقط ط}}{\text{اوس ط}} + \text{ک}$$

$$\text{مثال (۳)} \text{ فرلا کی قیمت معلوم کرو۔}$$

$$\text{رکھو لا} = \text{اقط ط} = \frac{\text{فرلا}}{\text{قط}} = \text{اقط مس ط} = \text{فرلا} = \text{اقط مس ط} = \text{فرط}$$

$$\sqrt{\frac{\text{لا}}{\text{لا} - \text{لا}}} = \text{فرلا} = \frac{\text{اوس ط} \cdot \text{اقط ط}}{\text{اقط ط}} = \text{اوس ط} = \text{اقط ط} = \text{فرط}$$

$$\text{پس } \sqrt{\frac{\text{لا}}{\text{لا} - \text{لا}}} = \text{فرلا} = \frac{\text{اوس ط} \cdot \text{اقط ط}}{\text{اقط ط}} = \text{اوس ط} = \text{اقط ط} = \text{فرط}$$

$$= \frac{\text{اوس ط} - 1}{\text{اوس ط}} = \text{فرط} = \text{اوس ط} - 1 = \text{فرط}$$

$$= \text{کوک (مس ط + قسط ط) - جب ط} + \text{ک}$$

$$= \text{کوک} - \left\{ \frac{\text{اوس ط} - \text{لا}}{\text{اوس ط}} + \text{لا} \right\} + \text{ک} = \text{کوک} - \left\{ \frac{\text{اوس ط} - \text{لا}}{\text{اوس ط}} + \text{لا} \right\} + \text{ک}$$

ان تین مثالوں سے ظاہر ہے کہ اگر تکمیل میں لا شامل ہو تو

لا = واجب ط یا لا = وجہ ط رکھنا چاہیے۔ اگر مکمل میں (لا + لا) شامل ہو تو لا = وجہ ط رکھنا چاہیے اور اگر مکمل میں لا - لا شامل ہو تو لا = وجہ ط رکھنا چاہیے۔

مثلاً ابدال کا فائدہ زیادہ تر معین تکملوں میں معلوم ہوتا ہے جہاں پیچیدہ تکملوں کی قیمت آسانی سے حاصل ہو جاتی ہے۔

مثال (۳) لا (لا - لا) فلا کی قیمت معلوم کرو۔

رکھ لا = وجہ ط (لا = وجہ ط رکھیں بھی تو یہی قیمت حاصل ہوگی)  
لا - لا = لا - وجہ ط = وجہ ط

فرض لا = - وجہ ط

لا = تو ط =  $\frac{\pi}{2}$  لا = تو ط = .

پس لا (لا - لا) فلا = -  $\frac{\pi}{2}$  وجہ ط . (وجہ ط) لا جب ط فرض

= +  $\frac{\pi}{2}$  وجہ ط . وجہ ط . وجہ ط فرض

= لا (لا - لا) وجہ ط جب ط فرض

مجموع لا جب لا فلا کے لیے دفعہ ۵۳ و ۵۴ کی مثال ۹ مساوات (۴) استعمال

کر سکتے ہیں کیونکہ یہاں ن = م = ۶ دونوں جفت ہیں۔  
اس لیے

$$\frac{\pi}{2} \times \frac{(5-6)(3-6)(1-6)(3-3)(1-3)}{(8-10)(6-10)(4-10)(2-10)10} لا = لا (لا - لا) فلا$$

$$\frac{\pi 3}{512} =$$



مثال (۵)  $\int_0^1 \sqrt{1-x} \, dx$  فرلا کی قیمت معلوم کرو۔

رکھو  $u = 1-x$  جب  $x=0$  ' فرلا  $= 1$  جب  $x=1$  جم  $u=0$

$1-x = u$  '  $-1 = -du$  '  $1 = du$  جب  $x=0$  جم  $u=1$

$\int_1^0 \sqrt{u} \, (-du) = \int_0^1 \sqrt{u} \, du = \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$

پس  $\int_0^1 \sqrt{1-x} \, dx = \frac{2}{3}$  فرلا  $= 1$  جب  $x=0$  جم  $u=1$  جب  $x=1$  جم  $u=0$

$\int_0^1 \sqrt{1-x} \, dx = \frac{2}{3}$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{(1-0)^{3/2} - (1-1)^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3} \times \frac{1^{3/2} - 0^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

مثال (۶)  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx$  فرلا کی قیمت معلوم کرو۔

رکھو  $u = 1-x^2$  جب  $x=0$  ' فرلا  $= 1$  جب  $x=1$  جم  $u=0$

$1-x^2 = u$  '  $-2x = -du$  '  $x = \frac{1}{2} du$  جب  $x=0$  جم  $u=1$  جب  $x=1$  جم  $u=0$

$\int_1^0 \sqrt{u} \, \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int_0^1 \sqrt{u} \, du = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$

پس  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{1}{3}$  فرلا  $= 1$  جب  $x=0$  جم  $u=1$  جب  $x=1$  جم  $u=0$

$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{1}{3}$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{(1-0)^{3/2} - (1-1)^{3/2}}{3/2} = \frac{1}{2} \times \frac{1^{3/2} - 0^{3/2}}{3/2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3/2} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

## مشقی سوالات ۲۷

حسب ذیل تکملوں کی قیمت دریافت کرو :-

$$(۱) \int \frac{x}{x^2(x^2-2)} dx \quad (۳) \int \frac{x}{x^2(x^2+9)} dx$$

$$(۳) \int \frac{x}{x^2(x^2-3)} dx \quad (۴) \int \frac{x}{x^2(x^2-16)} dx$$

$$(۵) \int \frac{x}{x^2(x^2-5)} dx \quad (۶) \int \frac{x}{x^2(x^2-36)} dx$$

$$(۷) \int \frac{x}{x^2(x^2-9)} dx \quad (۸) \int \frac{x}{x^2(x^2-25)} dx$$

$$(۹) \int \frac{x}{x^2(x^2+4x+4)} dx \quad (۱۰) \int \frac{x}{x^2(x^2-1)} dx$$

$$(۱۱) \int \frac{x}{x^2(x^2+1)(x^2+4)} dx \quad (۱۲) \int \frac{x}{x^2(x^2+1)(x^2+9)} dx$$

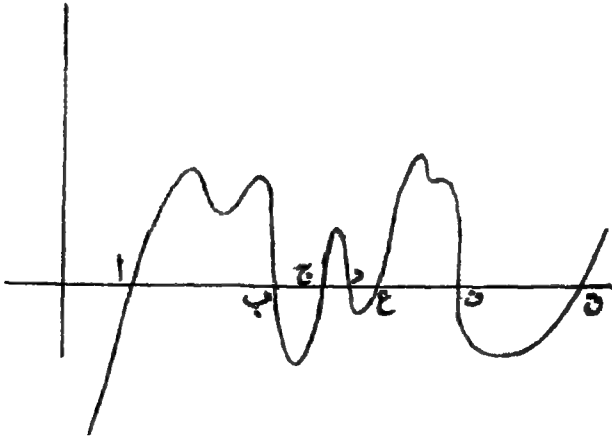
$$(۱۳) \int \frac{x}{x^2(x^2-1)(x^2+1)} dx$$

# باب ششم

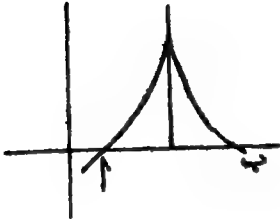


۱۶۔ رول کا مسئلہ :- اگر ف (لا) متغیر لا کا

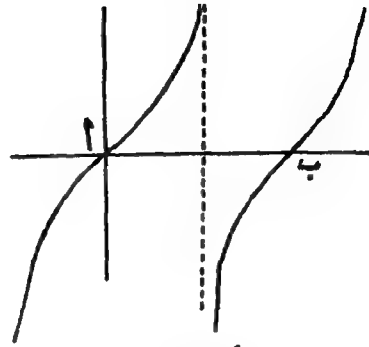
سلسل تفاعل ہو اور لا = ۱ اور لا = ب کے لیے ف (لا) صفر کے مساوی ہو  
یعنی ف (۱) = ف (ب) = صفر نیز ان حدود میں ف (لا) مسلسل ہو تو  
رول کا مسئلہ بیان کرتا ہے کہ ف (لا) کی قیمت ۱ اور ب کے درمیان لا کی  
کم از کم ایک قیمت کے لیے صفر ہوگی یعنی ف (لا) = ۰ جہاں ۱ > لا > ب



شکل ۱۔



شکل ۳



شکل ۲

شکل (۱) سے ظاہر ہے کہ ف (لا) = ۰ کی ہر دو اصلوں کے درمیان ف (لا) کم از کم ایک مرتبہ اور بعض صورتوں میں ۲، ۳، ۴، ۵، ... وغیرہ طاق مرتبہ صفر ہے۔ شکل (۲) اور (۳) میں مسئلہ کی شرائط پوری نہیں ہوتی ہیں۔ شکل (۲) میں منحنی اور ڈھال دونوں غیر مسلسل ہیں اور شکل (۳) میں ڈھال غیر مسلسل ہے اس لیے مسئلہ رول کا ان پر اطلاق نہیں ہو سکتا۔ مسئلہ کو ثابت کرنے کے لیے ف (ا) = ف (ب) = صفر

اب یا تو تعامل ف (لا) نقاط ۱ اور ب کے درمیان تمام نقطوں پر صفر رہے گا اور ایسی صورت میں لا کی تمام قیمتوں کے لیے ف (لا) = ۰ اور اس لیے ف (لا) = ۰ اور مسئلہ ثابت ہو گیا یا نقطہ ۱ کے بعد ف (لا) کی قیمت بڑھیں گی یا گھٹیں گی۔ اگر بڑھیں گی تو ف (لا) مثبت ہوگا۔ اور پھر ف (ب) = ۰ کے لیے ضروری ہے کہ کسی نقطہ کے بعد ف (لا) کی قیمت گھٹنا شروع کرے یعنی ف (لا) منفی ہو۔ اب اگر ف (لا) اور ف (لا) مسلسل ہوں تو ضروری ہے کہ کسی نقطہ پر ف (لا) نہ مثبت ہوگا نہ منفی یعنی ف (لا) = صفر اور مسئلہ رول ثابت ہو گیا۔

اگر نقطہ ۱ کے بعد ف (لا) گھٹتا تو ف (ب) = ۰ کے لیے ضروری ہے کہ کسی نہ کسی نقطہ کے بعد بڑھنا شروع کرے اور اس نقطہ پر ف (لا) نہ منفی ہو سکتا ہے اور نہ مثبت۔ اس لیے ف (لا) صفر ہوگا اور مسئلہ ثابت ہو گیا۔ بہت ممکن ہے کہ ۱ اور ب کے درمیان ف (لا) یکے بعد دیگرے کئی مرتبہ بڑھے

اور کئی مرتبہ گھٹے۔ ایسی صورت میں لا اور ب کے درمیان ف (لا) ایک سے زیادہ طاق مرتبہ صفر ہوگا۔ اگر نقطہ ب کے بجائے لا + ۱۰ لکھیں تو مسئلہ کو یوں لکھ سکتے ہیں :-

کہ ف (لا) = ف (لا + ۱۰) = ۰ تو ف (لا + ۱۰) = ۰ جہاں ۰ > ۱۰  
یعنی ۰ مثبت کسر واجب ہے۔

چونکہ یہ مسئلہ بہت اہم ہے اس کا ایک تحلیل ثبوت مع قیود کے دیا جائیگا۔ اگر یہ ثبوت مشکل معلوم ہو تو کتاب کے پہلے مطالعہ میں اسے چھوڑ دیا جائے۔ تفاعل ف (لا) مسلسل ہے اور ف (لا) = ف (ب) = صفر تو چونکہ ہر مسلسل تفاعل کی بند وقفہ میں ایک سب سے بڑی قیمت ع اور ایک سب سے چھوٹی قیمت ق ہوتی ہے (جواب دوم میں ثابت کیا گیا ہے) مسئلہ کے ثبوت میں دو صورتیں ہیں :

صورت اول میں فرض کر دو کہ ع = ق = صفر اس لیے ف (لا) تمام قیمتوں کے لیے صفر ہے اور ف (لا) = صفر اور مسئلہ ثابت ہوا۔

صورت دوم میں ع ≠ صفر تو تغیر کی کسی خاص قیمت لا کے لیے ف (لا) = ع اور اگر ۱۰ کوئی مثبت مقدار ہو تو ف (لا + ۱۰) > ف (لا)

$$\text{اور } \frac{\text{ف (لا + ۱۰) - ف (لا)}}{۱۰} > \text{صفر}$$

اور لا کی مثبت جانب سے انتہا میں ف (لا) > صفر  
 نیز ف (لا - ۱۰) > ف (لا)

$$\text{اس لیے } \frac{\text{ف (لا - ۱۰) - ف (لا)}}{۱۰} > \text{صفر}$$

اب (۱-) سے ضرب دینے سے لا تساوات اُلٹ جاتی ہے۔

$$\text{اور } \frac{\text{ف (لا - ۱۰) - ف (لا)}}{۱۰} < \text{صفر}$$

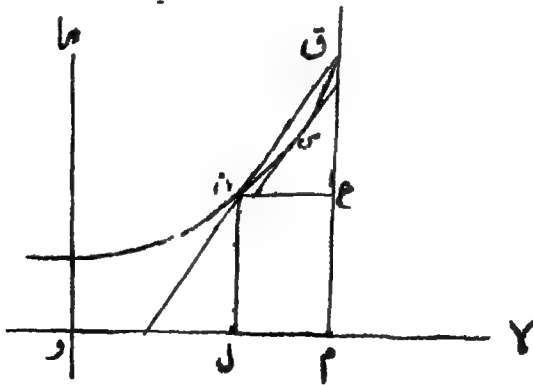
اس لیے لا کی منفی جانب سے انتہا میں ف (لا) < صفر

پس ف (لا) = صفر  
 رول کے مسئلہ کا نتیجہ صحیح :-  
 اگر ف (۱) = ف (ب) = مستقل مر تو ف (لا) متغیر لاکھ کم از کم  
 ایک قیمت کے لیے جو لا اور ب کے درمیان واقع ہے صفر ہوگا۔ اس مسئلہ کو  
 ثابت کرنے کے لیے ف (لا) - مر پر غور کرو۔ یہ تفاعل رول کے مسئلہ کی  
 شرائط کو پورا کرتا ہے اس لیے ف (لا) صفر ہوگا جہاں  $لا > ب$ ۔  
 ۶، ۲۔ اوسط قیمت کا مسئلہ :- رول کے مسئلہ سے

ایک اہم مسئلہ اخذ کیا جاتا ہے جس کو اوسط قیمت کے مسئلہ سے نامزد کرتے ہیں۔  
 یہ مسئلہ ہے کہ اگر ف (لا) اور ف (لا) مسلسل ہوں جبکہ  $لا > ب$   
 تو ف (ب) - ف (۱) = ف (ب) - ف (۱) جہاں  $لا > ب$   
 ہندسی شکل سے ظاہر ہے کہ ما = ف (لا) کی ترسیم پر دو نقاط ن اور ق  
 ہیں جن کے محدد ہیں

$$\left[ \frac{وا}{ف(۱)} \right] اور \left[ \frac{ب}{ف(ب)} \right] تو \frac{ف(ب) - ف(۱)}{ب - ۱} = \frac{ق - م}{ن - ل}$$

$$= \frac{ق - م}{ن - ل} = مس (ق ن ع)$$



پس ہندسی الفاظ میں مسئلہ کو یوں بیان کر سکتے ہیں کہ وترن قی قوس کے کسی درمیانی نقطہ پر محاسن کے متوازی ہے۔

اس مسئلہ کو ثابت کرنے کے لیے تفاعل فا (لا) پر غور کرو جہاں

$$\text{فا (لا)} = \text{ف (لا)} - \text{ف (لا)} - \left\{ \frac{\text{ف (ب)} - \text{ف (لا)}}{\text{ب} - \text{لا}} \right\} \text{ (لا - لا)}$$

تفاعل فا (لا) حدود لا اور ب کے درمیان مسلسل ہے اور اس کا تفرقی سر بھی مسلسل ہے۔

نیز ظاہر ہے کہ فا (لا) = ف (لا) - ف (لا) - \left\{ \frac{\text{ف (ب)} - \text{ف (لا)}}{\text{ب} - \text{لا}} \right\} (لا - لا) = صفر

اور فا (ب) = ف (ب) - ف (ب) - \left\{ \frac{\text{ف (ب)} - \text{ف (لا)}}{\text{ب} - \text{لا}} \right\} (ب - لا) = صفر

اس لیے تفاعل فا (لا) پر مسئلہ رول لگانے سے حاصل ہوتا ہے کہ  
فا (لا) = ۰۔ جہاں لا وقفہ (لا ب) میں مناسب نقطہ ہے۔

$$\text{اب فا (لا)} = \text{ف (لا)} - \frac{\text{ف (ب)} - \text{ف (لا)}}{\text{ب} - \text{لا}}$$

$$\therefore \text{فا (لا)} = \text{ف (لا)} - \frac{\text{ف (ب)} - \text{ف (لا)}}{\text{ب} - \text{لا}} = \text{صفر}$$

$$\therefore \frac{\text{ف (ب)} - \text{ف (لا)}}{\text{ب} - \text{لا}} = \text{ف (لا)}$$

یعنی ف (ب) - ف (لا) = (ب - لا) ف (لا) اور مسئلہ

ثابت ہوا۔ نتیجہً ملاحظہ فرمائیے (۱)۔ چونکہ یہ مسئلہ بیت اہم ہے اس کی دو ذرا مختلف شکلیں بھی یہاں بیان کر دی جاتی ہیں۔

فرض کرو کہ ب = لا + ہ اور لا = لا + ط جہاں ط مناسب مثبت کسر واجب ہے

تو ف (۱+۳) = ف (۱) + ۳ ف (۱+۳ طہ)   
 نتیجہ صریح (۲) - نیز اگر لو کی بجائے لا لگائیں ادب کی بجائے   
 لا + Δ لا

تو ف (لا + Δ لا) - ف (لا) = Δ لا × ف (لا + طہ × Δ لا)   
 مثال (۱) اگر ف (لا) = لا<sup>۳</sup> - ۴ لا تو ف (لا) = ۰ اور ف (لا) = ۰   
 سے لا کی قیمتیں نکال کر رول کے مسئلہ کی تصدیق کرو -

ف (لا) = لا<sup>۳</sup> - ۴ لا = لا (لا<sup>۲</sup> - ۴) = لا (۲-لا) (۲+لا)

∴ ف (لا) = ۰ جبکہ لا = ۲، ۰، -۲

اور ف (لا) = لا<sup>۳</sup> - ۴ لا = ۰ جبکہ لا = ± √۴

چونکہ √۴ نقاط ۲ اور صفر کے درمیان اور -√۴ نقاط صفر اور -۲ کے   
 درمیان واقع ہے - اس لیے رول کے مسئلہ کی تصدیق ہوتی ہے -   
 (۲) لا کی وہ قیمتیں دریافت کرو جو ف (لا) = ۰ اور ف (لا) = ۰ کو   
 پورا کرتی ہیں اور اس سے رول کے مسئلہ کی تصدیق کرو -

(۱) ف (لا) = لا<sup>۳</sup> - ۴ لا

(ب) ف (لا) = لا<sup>۶</sup> - لا<sup>۳</sup>

(ج) ف (لا) = لا + ب لا + ج لا<sup>۲</sup>

(د) ف (لا) = جب ۲ لا - جم ۲ لا

(ه) ف (لا) = لا لوک لا

(۳) بتاؤ کہ ذیل کے تغاٹوں پر رول کا مسئلہ استعمال ہو سکتا ہے

یا نہیں - اپنے جواب کی وجہ بیان کرو -

(۱) ف (لا) = مس لا اور لا = صفر اور ۳

(ب) (۱+۱) = لا<sup>۳</sup> = لا<sup>۲</sup> میں لا = صفر جبکہ لا = ۱ - ۱

(۳) اگر ف (لا) = لا تو بتاؤ کہ لا = ۱ اور لا = ۲ کے درمیان

کسی نقطہ پر ماکس وٹر کے متوازی ہے

اب ف (ب) - ف (ا) = (ب - ا) ف (لا)



$$\therefore \text{ف (لا)} = \frac{\text{ف (ب)} - \text{ف (ا)}}{\text{ب} - \text{ا}} = \frac{\text{ف (۲)} - \text{ف (۱)}}{۲ - ۱} = \frac{۱ - ۳}{۱} = ۳$$

۳ = لا ۲ = لا ۳ = لا  
(۵) ذیل کے تغاٹوں میں لا کی قیمت معلوم کرو جو رشتہ  
ف (ب) = ف (ا) + (ب - ا) ف (لا) کو پورا کرے اور تصدیق کرو کہ  
لا اور ب کے درمیان واقع ہے۔

$$\text{ف (ا)} = \frac{\text{لا}}{۳} \quad \text{ب} = ۲ \quad \frac{\text{لا}}{۴} = ۱$$

$$\text{ف (ب)} = \frac{\text{لا}}{۲} = ۱ \quad \frac{\text{لا}}{۴} = ۰ \quad \text{اور ب} = \frac{۹}{۱۶}$$

$$\text{ف (ج)} = \frac{\text{لا}}{۵} = ۰ \quad \text{اور ب} = ۱$$

$$\text{ف (د)} = \frac{\text{لا}}{۶} = ۰ \quad \text{اور ب} = ۱$$

(۶) اگر ف (لا) = لا اور ۱ = ۴ اور ۵ = ۱ تو اوسط مسئلہ  
میں طہ کی قیمت معلوم کرو۔

$$\text{ف (ا + ب)} = \text{ف (ا)} + \text{ف (ب + طہ)}$$

$$\therefore (۱ + ۲) = ۳ + ۱ \times ۱ + ۳ \times (۲ + طہ)$$

$$\therefore ۱۲۵ = ۳ + ۶۳ + ۳(طہ + ۲)$$

$$\therefore \frac{۶۱}{۳} = (طہ + ۲)$$

$$\frac{۶۱}{۳} = طہ + ۲ \quad ۵.۰۹۲۵ = ۲ - ۴.۰۹۲۵ = ۲ - \frac{۶۱}{۳} = طہ$$

طہ کی قیمت ہے اس امر کی تصدیق ہوتی ہے کہ طہ کسر واجب ہے۔

(۷) اگر ف (لا) = لا ۳ - لا ۲ = ۵ تو طہ کی قیمت معلوم کرو جبکہ

$$(۱) \quad ۶ = ۱ \quad \text{اور} \quad ۱ = ۱$$

$$(۲) \quad ۱۲ = ۱ \quad \text{اور} \quad ۳ = ۱$$

(۸) اگر ف (لا) = لا ۲ - لا ۳ = ۵ تو طہ کی قیمت معلوم کرو جبکہ

$$(۱) \quad ۱ = ۲ \text{ اور } ۳ = \frac{۱}{۳}$$

$$(۲) \quad ۱ = ۸ \text{ اور } ۱ = \frac{۱}{۸}$$

### ۶۴۳ - اوسط مسئلہ کی توسیع :- دفعہ ثانی

میں دیے ہوئے اوسط کے مسئلہ کی توسیع ہو سکتی ہے - فرض کرو کہ ف (لا) کا دوسرا مشتق وجود رکھتا ہے اور سلسل ہے تو سابقہ ترقیم کے مطابق فرض کرو کہ

$$\text{فا (لا)} = \text{ف (لا)} - \text{ف (لا)} - \text{ف (لا)} - \frac{۱}{۲} (\text{لا} - \text{لا}) \times \frac{۱}{۲} (\text{ب} - \text{ب}) - \frac{۱}{۲} (\text{ف} - \text{ف})$$

اب تفاعل فا (لا) حدود ۱ اور ب کے درمیان مسلسل ہے اور اس کا تفریق سبھی سلسل ہے اور واضح ہے کہ فا (لا) = فا (ب) = ۰ اس لیے ضروری ہے کہ مسئلہ رول سے فا (لا) = ۰ جہاں

$$۱ > لا > ب \text{ اب فا (لا) = ف (لا) - ف (لا) - ف (لا) - } \frac{۱}{۲} (\text{ب} - \text{ب}) - \frac{۱}{۲} (\text{ف} - \text{ف})$$

اس میں لا = ۱ درج کرنے سے ثابت ہوتا ہے کہ فا (لا) = ۰ اس لیے تفاعل فا (لا) پر بھی مسئلہ رول لگ سکتا ہے اور اس سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\text{فا (لا) = ۰ جہاں } ۱ > لا > ب \text{ فا (لا) = ف (لا) - ف (لا) - ف (لا) - } \frac{۱}{۲} (\text{ب} - \text{ب}) - \frac{۱}{۲} (\text{ف} - \text{ف})$$

$$\text{اس لیے فا (لا) = ۰ = ف (لا) - ف (ب) - ف (لا) - } \frac{۱}{۲} (\text{ب} - \text{ب}) - \frac{۱}{۲} (\text{ف} - \text{ف})$$

سادہ کرنے سے  $\frac{۱}{۲} (\text{ب} - \text{ب}) \text{ ف (لا) - [ف (ب) - ف (لا) - ف (ب) - ف (لا)]}$

یعنی ف (ب) = ف (لا) + ف (ب) - ف (لا) +  $\frac{۱}{۲} (\text{ب} - \text{ب}) \text{ ف (لا)}$   
یہ اوسط مسئلہ کی دوسرے مشتق تک توسیع ہے - اگر ف (لا) کان - واں مشتق  
سلسل ہو تو اسی طرح ثابت ہو سکتا ہے کہ

$$\text{ف (ب) = ف (۱) + (ب-۱) ف (۱) + \frac{(ب-۱)^2}{۲} ف (۱) + \frac{(ب-۱)^3}{۶} ف (۱) + \dots$$

جہاں  $۱ > ۱ > ۱ > ۱ > \dots > ۱ > ۱ > ۱ > ۱ > ۱$   
یہ اوسط کا توسیع شدہ سکہ کہلاتا ہے -  
اس میں  $\text{ب} = ۱ + ۱$  درج کریں تو

$$\text{ف (۱+۱) = ف (۱) + لاف (۱) + \frac{لا۲}{۲} ف (۱) + \dots + \frac{لا۳}{۶} ف (۱) + \dots$$

جہاں  $\text{ف (۱+۱)}$  واجب ہے -  
یہ اٹیلر کا سکہ کہلاتا ہے کیونکہ ڈاکٹر برک اٹیلر (۱۶۸۵ء - ۱۷۳۱ء) نے  
اس سکہ کو اپنی کتاب (Methodus Incrementorum) میں ۱۷۱۵ء میں  
شایع کیا تھا -

اب لا متناہی سلسلہ  $\text{ف (۱) + لاف (۱) + \frac{لا۲}{۲} ف (۱) + \dots + \frac{لا۳}{۶} ف (۱) + \dots$   
پر غور کرو - پہلے باب میں بتایا گیا ہے کہ سلسلہ کے استدقاق کے لیے ضروری ہے  
کہ  $n$  ویں رقم صفر کی طرف مائل ہو جبکہ  $n \rightarrow \infty$  لیکن یہ شرط کافی نہیں ہے  
کافی شرط یہ ہے کہ  $n$  رقموں کے بعد کی تمام رقموں کا مجموعہ صفر کی طرف مائل  
ہو جبکہ  $n \rightarrow \infty$   $n$  رقموں کے بعد کی تمام رقموں کے مجموعے کو باقی کہتے  
ہیں - مقابلہ سے ظاہر ہے یہ اٹیلر کے پھیلاؤ میں  $\frac{لا۳}{۶} ف (۱) + \dots + \frac{لا۳}{۶} ف (۱) + \dots$   
باقی ہے اور اگر یہ صفر کی طرف مائل ہو جبکہ  $n \rightarrow \infty$  تو لا انتہا سلسلہ متدفق  
ہے اور اس لیے تفاعل کو لا متناہی سلسلے میں پھیلا یا جاسکتا ہے -

پس  $\text{ف (۱+۱) = ف (۱) + لاف (۱) + \frac{لا۲}{۲} ف (۱) + \dots + \frac{لا۳}{۶} ف (۱) + \dots$   
اس کو اٹیلر کا پھیلاؤ کہتے ہیں اور یہ صرف ایسے تفاعلوں کے لیے درست ہے

جن کے لیے  $\frac{\text{لا}}{\text{لا}}$  ف<sup>(ن)</sup> (لا + لا طہ) ← صفر جبکہ ن ← ∞ 'علم احصا' میں یہ مسئلہ بہت اہم ہے اور اس لیے باقی پر اعلیٰ ریاضی دانوں نے غور کیا ہے اور اس کی دو خاص شکلیں لگراجیج اور کوشی نے حاصل کی ہیں۔ اس کتاب میں صرف ایسے تغالوں کے پھیلاؤ پر غور کیا جائیگا جن کے لیے باقی صفر کی طرف مائل ہوتا ہے۔

ایٹیلر کے پھیلاؤ میں  $1 = 0$  رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ف (لا)} = \text{ف (۰)} + \text{لا ف (۰)} + \dots + \frac{\text{لا}}{\text{لا}} \text{ف (ن)} + (۰) + \dots$$

بشرطیکہ  $\frac{\text{لا}}{\text{لا}}$  ف<sup>(ن)</sup> (لا طہ) ← ۰ جبکہ ن ← ∞  
یہ پھیلاؤ سٹرنلنگ (۱۶۹۲ء - ۱۷۷۷ء) نے حاصل کیا تھا لیکن اس نے شایع نہیں کیا۔ کولن میکلوہرن (۱۶۹۸ء - ۱۷۴۷ء) نے سب سے پہلے اسے اپنی کتاب (Treatise on Fluxions) میں ۱۷۴۲ء میں شایع کیا اور اس لیے یہ پھیلاؤ میکلوہرن کا پھیلاؤ کہلاتا ہے۔

$$\text{مثال (۱) آخر ف (لا)} = \text{لا}^۳ - ۳ \text{لا}^۲ + ۵ \text{لا} + ۷$$

تو ایٹیلر کے ملکہ کی مدد سے ف (لا + ۲) معلوم کرو۔

$$\text{ف (لا + ۲)} = \text{ف (۲)} + \text{لا ف (۲)} + \frac{\text{لا}^۲}{۲} \text{ف (۲)} + \frac{\text{لا}^۳}{۶} \text{ف (۲)} + \dots$$

$$\text{اب ف (۲)} = ۲^۳ - ۳ \times ۲^۲ + ۵ \times ۲ + ۷ = ۹$$

$$\text{ف (۵)} = ۵^۳ - ۳ \times ۵^۲ + ۵ \times ۵ + ۷ = ۱۸$$

$$\therefore \text{ف (۲)} = ۲^۳ - ۳ \times ۲^۲ + ۵ \times ۲ + ۷ = ۱$$

$$\text{اور ف (لا)} = ۸ - ۱۲ = ۴ \therefore \text{ف (۲)} = ۸ - ۱۲ = ۴$$

$$\text{اور ف (لا)} = ۶ \therefore \text{ف (۲)} = ۶$$

$$\text{اور ف (لا)} = \text{صفر} \therefore \text{ف (۲)} = \text{صفر}$$

اور ظاہر ہے کہ چونکہ سے اعلیٰ رتبہ کے تمام مشتق صفر ہیں

$$\text{اس لیے ف } (۷+۲) = ۹ + ۷ \times ۱ + \frac{۷^۲}{۲!} + (۳) \frac{۷^۲}{۳!} + (۶) \frac{۷^۲}{۴!} + \dots$$

$$= ۹ + ۷ + ۲ \times ۷ + ۷^۲$$

(۳) لوگ کو (۱-۷) کی قوتوں میں پھیلاؤ۔

$$\text{ف } (۱+۱-۷) = \text{ف } (۱-۷) + ۱$$

$$= \text{ف } (۱) + (۱-۷) \text{ ف } (۱) + \frac{(۱-۷)^۲}{۲!} \text{ ف } (۱) + \dots$$

$$\text{اب ف } (۷) = \text{ف } (۷) = \text{ف } (۷) = \dots$$

$$\text{ف } (۱) = \text{ف } (۱) = \text{ف } (۱) = \dots$$

$$\text{ف } (۷) = \text{ف } (۷) + (۱-۷) \text{ ف } (۷) + \frac{(۱-۷)^۲}{۲!} \text{ ف } (۷) + \dots$$

$$= \left[ \text{ف } (۷) + (۱-۷) \text{ ف } (۷) + \frac{(۱-۷)^۲}{۲!} \text{ ف } (۷) + \dots \right] \text{ ف } (۷)$$

باقی =  $\frac{(۱-۷)^۲}{۲!} \text{ ف } (۷) + \dots$  اور یہ لاکھ کی تمام قیمتوں کے لیے صفر کی طرف

مائل ہوتا ہے چونکہ ان نسب نمایاں ہیں اس لیے پھیلاؤ درست ہے۔

$$(۳) ۳ \times ۷^۲ - ۵ \times ۷ + ۸ - ۵ \text{ کو } (۲-۷) \text{ کی قوتوں میں پھیلاؤ۔}$$

$$(۴) \text{ لوگ } (۷+۱) \text{ کو لاکھ کی قوتوں میں پھیلاؤ اور پھر } = ۱ \text{ رکھ کر}$$

لوگ (۱+۷) کا پھیلاؤ حاصل کرو۔

$$(۵) \text{ اگر ف } (۷) = ۵ \times ۷^۲ - ۳ \times ۷ + ۸ - ۵ \text{ تو ف } (۲-۷) \text{ کی}$$

قیمت معلوم کرو۔

$$(۶) \text{ ف } (۲+۷) \text{ معلوم کرو جبکہ ف } (۷) = ۵ \times ۷^۲ - ۳ \times ۷ + ۸$$

$$(۷) \text{ لوگ لاکھ } (۱-۷) \text{ کی قوتوں میں پھیلاؤ۔}$$

$$(۸) \text{ جب } (۷+۱) \text{ کو ماکھ کی قوتوں میں پھیلاؤ اور اس میں } ۷ = \text{صفر اور}$$

$$۷ = \text{لا رکھ کر جب لا 'جم لاکھ کا پھیلاؤ حاصل کرو۔ ان پھیلاؤ سے}$$

تصدیق کرو کہ جب (۷+۱) = جب لا جم لا + جم لا جب لا

$$(۹) \frac{۱}{۷} \text{ کو } (۱-۷) \text{ کی قوتوں میں پھیلاؤ۔}$$

(۱۰) فو  $h + لا$  اور  $(لا + ه)$  کو لا کی قوتوں میں پھیلاؤ۔

(۱۱) جب لا کو میکورن کے مسئلہ سے پھیلاؤ

$$جب لا = ف (لا) = ف (۰) + لا ف (۰) + \frac{لا^2}{۲} ف (۰) + \dots + \frac{لا^n}{n} ف (۰) (ط لا)$$

$$اب ف (لا) = جم لا = جب (لا + \frac{لا}{۲})$$

$$اور ف (لا) = جم (لا) = جب (لا + \frac{لا}{۲}) = جب (لا + \frac{لا}{۲} \times ۲)$$

$$\dots ف (۰) (لا) = جب (لا + \frac{لا}{۲} \times n)$$

$$\therefore جب لا = ۰ + لا \times جب \frac{لا}{۲} + \frac{لا^2}{۲} \times جب \frac{لا}{۲}$$

$$+ \frac{لا^3}{۳} \times جب \frac{لا}{۳} + \dots + \frac{لا^n}{n} \times جب (لا + \frac{لا}{۲})$$

$$اب \frac{لا}{n} جب (لا + \frac{لا}{۲}) پر غور کرو جب (لا + \frac{لا}{۲}) تمام$$

قیمتوں کے لیے ایک سے کم ہے اور لا اور لا دونوں لاتناہی کی طرف  
مائل ہیں اگر  $\infty$  لیکن طالب علم یہ مان لے کہ  $n$  بمقابلہ لا بہت بڑا

لاتناہی ہے اس لیے  $\frac{لا}{n} \rightarrow ۰$  صفر جبکہ  $n \rightarrow \infty$  متغیر لا کی تمام  
قیمتوں کے لیے

$$پس جب لا = لا - \frac{لا^2}{۲} + \frac{لا^3}{۳} - \frac{لا^4}{۴} + \dots$$

(۱۲) ذیل کے تغا علوں کو میکورن کے مسئلہ سے پھیلاؤ

$$(۱) فو (ب) لوک (لا + ۱)$$

$$(ج) جب لا (د) مس لا$$

$$(ه) جم لا (و) مس لا$$

$$(ز) قط لا$$

$$(۱۳) ثابت کرو کہ  $۱ + لا + \frac{لا^2}{۲} + \frac{لا^3}{۳} + \dots$$$



مسادات (۱) اور (۲) کی بائیں جانب کے جلوں کی قیمت ۴ کو کافی چھوٹا لینے سے پہلی رقم پر منحصر کی جاسکتی ہے۔ اب اعظم اور اقل نقطوں کے لیے ضروری ہے کہ ف (۱) - ف (۱+۴) اور ف (۱) - ف (۱-۴) کی علامت ایک ہی ہو اعظم نقطوں کے لیے مثبت اور اقل نقطوں کے لیے منفی۔ اس لیے ضروری ہے کہ مسادات (۱) اور (۲) کے بائیں جانب کی پہلی رقم صفر ہو کیونکہ یہ مختلف علامات ہے۔ یعنی اعظم اور اقل نقطوں کے لیے ضروری شرط ہے کہ ف (۱) = ۰۔

$$\text{اب ف (۱) - ف (۱+۴) = -\frac{۲۴}{۲۱} \text{ ف (۱) - ف (۱-۴) = } \dots\dots$$

$$\text{اور ف (۱) - ف (۱-۴) = -\frac{۲۴}{۲۱} \text{ ف (۱) - ف (۱+۴) = } \dots\dots$$

ان مساواتوں میں بائیں جانب کی علامت ایک ہی ہے اعظم نقطوں کے لیے -  $\frac{۲۴}{۲۱}$  ف (۱) کو مثبت ہونا چاہیے یعنی ف (۱) کو منفی ہونا چاہیے۔ اور اقل نقطوں کے لیے ف (۱) کو مثبت ہونا چاہیے۔ اگر ف (۱) بھی صفر ہو تو اعظم اور اقل نقطوں کے لیے ف (۱) کو بھی صفر ہونا چاہیے اور اعظم کے لیے ف (۱) منفی اور اقل کے لیے ف (۱) مثبت۔ پس عام صورت میں اگر

$$\text{ف (۱) = ف (۱) = ۰ \dots \text{ ف (۱) = ۰ اور ف (۱) = صفر}$$

اور ر طاق ہو تو نقطہ لا = اعظم یا اقل ہوگا جبکہ ف (۱) = صفر لیکن اگر ر جفت ہو تو لا = نقطہ انعطاف ہوگا۔

مثال (۱) ف (۱) = ف (۱) = ۰ + ۲ جم لا + ف (۱) کی اعظم اور اقل قیمتیں

معلوم کرو۔

$$\text{ف (۱) = ف (۱) = ۰ - ۲ جب لا - ف (۱) = صفر جبکہ لا = صفر}$$

$$\text{اور ف (۱) = ف (۱) = ۰ - ۲ جم لا + ف (۱) = ۱ + ۲ - ۱ = صفر}$$



اور ف (لا) =  $\text{قو}^۱ + ۲ \text{ جب لا} - \text{قو}^۱ = \text{صفر}$  جبکہ لا = صفر

اور ف (لا) =  $\text{قو}^۱ + ۲ \text{ جم لا} + \text{قو}^۱ = ۴$

اس لیے لا = صفر تفاعل ف (لا) کا اقل نقطہ ہے -

(۳) ذیل کے تفاعلوں کی اعظم اور اقل قیمت دریافت کرو:-

(ا)  $\text{لا}^۲ - \text{لا}^۱ + ۲۲ - ۷ = ۷$

(ب)  $\text{لا}^۲ - \text{لا}^۱ + ۵ = ۵$

(ج)  $\text{لا}^۳ + \text{لا}^۲ + ۳ = ۳$

(د)  $\text{لا}^۲ (۲ - \text{لا}) = ۲$

(ه) جب لا (۱ + جم لا)

(و)  $\frac{\text{لا}}{\text{لوک لا}}$

(ز)  $\text{لوک جم لا}$

(ح)  $۳ \text{ جب لا} + ۲ \text{ جم لا} = ۲$

(ط)  $\frac{\text{لا}}{\text{لا} + ۱}$

(ی)  $۳ \text{ لا}^۱ - ۱۲۵ \text{ لا}^۱ + ۲۱۶ - ۷ = ۲۱۶ - ۷$

(ک)  $\text{لا}^۲ + ۴ = ۴$

(ل)  $\text{لا}^۱ = ۱$

(م)  $\text{لا}^۱$

(ن) جب  $۲ \text{ لا جم لا}$

(ص)  $(۲ - \text{لا})^۲ + ۱ = ۱$

۵، ۶ - غیر معین شکلیں :- پہلے باب میں بتایا گیا ہے

کہ غیر معین شکل مثلاً  $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$  کی قیمت کے کیا معنی ہیں - حسابی عمل کی مدت تک  $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

کے کوئی معنی نہیں ہیں کیونکہ کسی ہندسہ کو صفر سے تقسیم نہیں کیا جاسکتا۔

غیر معین شکل کی قیمت سے دراصل انتہا مراد ہے یعنی اگر ف (لا) = فا (لا) = ۰،

تو  $\frac{ف (لا)}{فا (لا)}$  کی قیمت جبکہ لا = ۱ سے مراد ہے نہا  $\frac{ف (لا)}{فا (لا)}$  غیر میں شکلیں  
 بہت قسم کی ہوتی ہیں لیکن ان میں سب سے ہم  $\frac{صفر}{صفر}$  والی شکل ہے اور ہم  
 اسی پر سب سے پہلے غور کریں گے۔

$$۱۵۱۔ \frac{صفر}{صفر} :- \text{اگر } ف (۱) = فا (۱) = ۱ =$$

تو نہا  $\frac{ف (لا)}{فا (لا)}$  کی قیمت مطلوب ہے۔

فرض کرو کہ بہت چھوٹی مقدار ہے تب ایلر کے مسئلہ سے

$$ف (۱+۱) = ف (۱) + ۱ + ف (۱) + \frac{۱}{۱} + ف (۱+۱) + ۱$$

$$\text{اور } فا (۱+۱) = فا (۱) + ۱ + فا (۱) + \frac{۱}{۱} + فا (۱+۱) + ۱$$

$$\text{اب } \frac{نہا ف (لا)}{لا فا (لا)} = \frac{نہا ف (۱+۱)}{صفر فا (۱+۱)}$$

$$= \frac{نہا ف (۱) + ۱ + ف (۱) + \frac{۱}{۱} + ف (۱+۱) + ۱}{۱ - ۱ + فا (۱) + ۱ + فا (۱) + \frac{۱}{۱} + فا (۱+۱) + ۱}$$

$$= \frac{نہا ف (۱) + ۱ + ف (۱) + \frac{۱}{۱} + ف (۱+۱) + ۱}{۱ - ۱ + فا (۱) + ۱ + فا (۱) + \frac{۱}{۱} + فا (۱+۱) + ۱}$$

چونکہ  $ف (۱) = فا (۱) = ۱$

اور چونکہ  $\frac{صفر}{صفر}$  اس لیے سے تعین کر سکتے ہیں

$$= \frac{نہا ف (۱) + ۱ + ف (۱) + \frac{۱}{۱} + ف (۱+۱) + ۱}{۱ - ۱ + فا (۱) + ۱ + فا (۱) + \frac{۱}{۱} + فا (۱+۱) + ۱}$$

$$= \frac{ف (۱)}{فا (۱)} \text{ بشرطیکہ } ف (۱+۱) = فا (۱+۱)$$

اور ما (۱ + طہ ص) محدود ہوں جو شرط اکثر سوالات میں پوری ہوتی ہے۔

$$\text{نسب} \frac{ف (لا)}{لا \leftarrow ف (لا)} = \frac{ف (۱)}{فا (۱)}$$

اگر ف (۱) = فا (۱) = صفر تو اشیاء کے پھیلاؤ کو تیسرے تفریق تک لینے سے ثابت ہو سکتا ہے کہ

$$\text{نسب} \frac{ف (لا)}{لا \leftarrow ف (لا)} = \frac{ف (۱)}{فا (۱)} \text{ وغیرہ وغیرہ۔}$$

یعنی شمار کنندہ اور نسب نما کو علیحدہ علیحدہ تفریق کر کے لا = ۱ درج کرنے کے عمل کو اس وقت تک جاری رکھا جائے جب تک ان میں سے کم از کم ایک تفاعل کے مشتق کی قیمت صفر نہ ہو۔

مثال (۱) نسب  $\frac{۲ - لا^۲}{۶ - لا + لا^۲}$  کی قیمت دریافت کرو۔

$$\frac{۲}{۵} = \frac{لا^۲}{۱ + لا^۲} \text{ نسب} \frac{۲ - لا^۲}{۶ - لا + لا^۲} = \frac{۲ - لا^۲}{۶ - لا + لا^۲} \text{ نسب}$$

(۲) نسب  $\frac{لا^۳}{لا - جب لا - لا}$  کی قیمت معلوم کرو۔

$$\text{اب نسب} \frac{لا^۳}{لا - جب لا - لا} = \frac{لا^۳}{۱ - لا - جم لا} \text{ نسب} \frac{لا^۳}{۱ - لا - جم لا}$$

یہ بھی صفر کی شکل ہے

$$\therefore \text{نسب} \frac{لا^۶}{لا - جب لا} =$$

$$= \text{نسب} \frac{۶}{لا - جم لا} = ۶ -$$

(۳) ذیل کی قیمتیں محسوب کرو:-

$$(۱) \text{نسب} \frac{۱ + لا^۵ - لا^۶}{۱ - لا^۲ - لا^۸} \frac{۱}{۶} = لا$$

|     |     |   |
|-----|-----|---|
| (ب) | نہا | $\frac{لا - ۱}{لا - ۱}$                           |
| (ج) | نہا | $\frac{لا^۲ - لا}{لا - ۱}$                        |
| (د) | نہا | $\frac{۱ - جم ۲ لا}{(۲ - لا) جب لا - ۲ لا جم لا}$ |
| (ه) | نہا | $\frac{لا^۲}{لا^۲ - لا - ۱}$                      |
| (و) | نہا | $\frac{۲ - ۲ لا^۲}{(۱ - جم طه) طه}$               |
| (ز) | نہا | $\frac{جب طه}{طه}$                                |
| (ح) | نہا | $\frac{مس طه + قط طه - ۱}{مس طه - قط طه + ۱}$     |
| (ت) | نہا | $\frac{لوک جب ا}{(۶۲ - ۳) طه}$                    |
| (ی) | نہا | $\frac{لا - ب}{لا}$                               |
| (ک) | نہا | $\frac{(نولا - ۳) طه}{(۶ - لا) نولا + لا طه}$     |
| (ل) | نہا | $\frac{مس طه - جب طه}{جب طه}$                     |
| (م) | نہا | $\frac{لا - ۱}{لا - ۱}$                           |
| (ن) | نہا | $\frac{جب طه - مس طه}{مس طه - جب طه}$             |

۶۵۲- لاتناہی : اگر لاء ب کے لیے ف (لا) ← ∞  
 اور فا (لا) ← ∞ تو نہا  $\frac{ف (لا)}{فا (لا)}$  کی قیمت مطلوب ہے۔ اس صورت میں بھی ثابت ہو سکتا ہے کہ

نہا  $\frac{ف (لا)}{فا (لا)} = \frac{نہا}{لاء ب} = \frac{ف (لا)}{فاء (لا)}$  لیکن اس کا صحیح ثبوت ذرا مشکل ہے اور اس کتاب میں نہیں دیا جائیگا۔ اس مسئلہ کو صحیح مان کر سوالات میں استعمال کیا جاسکتا ہے۔ بعض صورتوں میں لکھ سکتے ہیں کہ نہا  $\frac{ف (لا)}{فاء (لا)}$   
 $= \frac{نہا}{لاء ب} = \frac{فاء (لا)}{ف (لا)}$  جو صفر والی غیر معین شکل ہے اور اس کی قیمت سابقہ دفعہ سے نکالی جاسکتی ہے۔

غیر معین شکل لاتناہی × صفر اور لاتناہی - لاتناہی کو مذکورہ بالا صفر یا لاتناہی والی شکل میں بہ آسانی تبدیل کیا جاسکتا ہے جیسا کہ مثالوں سے واضح ہوگا۔ نیز غیر معین شکلیں (صفر) (لاتناہی) اور (۱) لاتناہی کو کارتم لینے سے صفر × لاتناہی کی شکل میں تبدیل کی جاسکتی ہیں اور مثالوں سے ان کی قیمت نکالنے کا طریقہ واضح کیا جائیگا۔

مثال (۱) نہا  $\frac{لک لاء}{ق لاء}$  دریافت کرو۔ یہ لاتناہی کی غیر معین شکل ہے اور اسے صفر کی شکل میں آسانی سے بیان نہیں کیا جاسکتا۔

نہا  $\frac{لک لاء}{ق لاء} = \frac{نہا}{لاء ب} = \frac{۱}{لاء ب} = \frac{نہا}{لاء ب} = \frac{۱}{لاء ب}$  جب لاء لاء جم لاء  
 جو صفر والی غیر معین شکل ہے۔ اس لیے نہا  $\frac{۱}{لاء ب} = \frac{۱}{لاء ب} = \frac{۱}{لاء ب}$  جب لاء لاء جم لاء = صفر

مثال (۲) نہا  $\frac{مم ط}{مم ط}$  کی قیمت دریافت کرو۔ یہ لاتناہی کی غیر معین شکل ہے لیکن اس کو  $\frac{مم ط}{صفر}$  والی شکل میں بہ آسانی تبدیل کیا جاسکتا ہے۔

$$\frac{مم ط}{مم ط} = \frac{نہا}{مم ط} = \frac{مم ط}{مم ط}$$

$$= \frac{نہا}{\frac{۲}{۱} \times ۳} = \frac{۲}{۱} = ۳$$

ذیل کی قیمت محبوب کرو۔

$$(۳) \frac{لا}{لا} = \frac{لا}{لا}$$

$$(۴) \frac{نہا}{لا} = \frac{لا}{لا} \quad (۵) \frac{نہا}{لا} = \frac{لا}{لا}$$

$$(۶) \frac{نہا}{لا} = \frac{لا}{لا} \quad (۷) \frac{نہا}{لا} = \frac{لا}{لا}$$

(۸) نہا جب لا قم ۳ لا کی قیمت دریافت کرو۔ یہ صفر  $\times$  لاتناہی کی شکل ہے۔

$$\frac{نہا}{لا} = \frac{لا}{لا} = \frac{لا}{لا} = \frac{لا}{لا}$$

$$= \frac{نہا}{لا} = \frac{لا}{لا} = \frac{لا}{لا}$$

$$(۹) \frac{نہا}{لا} = \frac{لا}{لا} = \frac{لا}{لا} = \frac{لا}{لا}$$

کی غیر معین شکل ہے۔

$$\frac{نہا}{لا} = \frac{لا}{لا} = \frac{لا}{لا} = \frac{لا}{لا}$$

$$= \frac{\text{نہا}}{\text{طہ} \leftarrow \frac{\pi}{2}} = \frac{\text{جم طہ}}{\text{جب طہ}} = \frac{\pi}{1} = \text{صفر}$$

ذیل کی قیمتیں محسوب کرو :-

$$(10) \text{ نہا } \frac{\pi}{2} \leftarrow (2-1) \text{ مس } \frac{\pi}{2}$$

$$(11) \text{ نہا } \frac{\pi}{1} \leftarrow \frac{\text{لوک } (1-1) + \text{مس } \frac{\pi}{2}}{\text{مم } \pi}$$

$$(12) \text{ نہا } \frac{\pi}{2} \leftarrow (1-1) \text{ مس } \pi$$

$$(13) \text{ نہا } \frac{\pi}{2} \leftarrow \frac{1}{2\pi} - \frac{1}{2\pi}$$

$$(14) \text{ نہا } \frac{\pi}{2} \leftarrow \frac{1}{\infty} - \frac{1}{\infty} + 1$$

$$(15) \text{ نہا } \frac{\pi}{2} \leftarrow \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi}$$

$$(16) \text{ نہا } \frac{\pi}{2} \leftarrow \left[ \frac{\pi}{\pi} - \frac{\pi}{\pi} \right]$$

$$(17) \text{ نہا } \frac{\pi}{2} \leftarrow \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi}$$

$$(18) \text{ نہا } \frac{\pi}{2} \leftarrow \left[ \frac{1}{2-1} - \frac{1}{2-1} \right]$$

$$(19) \text{ نہا } \frac{\pi}{2} \leftarrow \left[ \frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} \right]$$

$$(20) (1-1) \text{ نہا } \frac{\pi}{2} \leftarrow \text{کی قیمت محسوب کرو جبکہ } 1 = 1 \text{ یہ صفر والی}$$

غیر معین شکل اختیار کرتی ہے -

$$\text{فرض کرو کہ } 1 = 1 \text{ نہا } \frac{\pi}{2} \leftarrow (1-1) \text{ نہا } \frac{\pi}{2}$$

لوکارقم لینے سے لوک  $1 = \text{نہیا}_{1 \leftarrow (1-1)} \text{لوک } (1-1)$  یہ صفر  $\times$  لا تنہا ہی والی شکل ہے

$$= \text{نہیا}_{1 \leftarrow (1-1)} \frac{\text{لوک } (1-1)}{\frac{1}{1-1}}$$

$$= \text{نہیا}_{1 \leftarrow (1-1)} \frac{\frac{1}{1-1}}{\frac{1}{1-1}} = \text{نہیا}_{1 \leftarrow (1-1)} - (1-1) \\ \therefore 1 = 1 = \text{نہیا}_{1 \leftarrow (1-1)} = \text{صفر}$$

(۲۱)  $\text{نہیا}_{\infty \leftarrow (1 + \frac{1}{n})}^n$  کی قیمت محبوب کرو :-

فرض کرو کہ  $\text{نہیا}_{\infty \leftarrow (1 + \frac{1}{n})}^n = 1$

تو لوک  $1 = \text{نہیا}_{\infty \leftarrow (1 + \frac{1}{n})}^n \text{لوک } (1 + \frac{1}{n})$

$$= \text{نہیا}_{\infty \leftarrow (1 + \frac{1}{n})}^n \frac{\text{لوک } (1 + \frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \text{نہیا}_{\infty \leftarrow (1 + \frac{1}{n})}^n \frac{\frac{1}{n} \times (-\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}$$

$$= \text{نہیا}_{\infty \leftarrow (1 + \frac{1}{n})}^n = 1$$

$\therefore 1 = \text{قوا} = \text{نہیا}_{\infty \leftarrow (1 + \frac{1}{n})}^n$

(۲۲)  $\text{نہیا}_{\frac{p}{q} \leftarrow (مس طه)}$  کی قیمت دریافت کرو :-

فرض کرو کہ  $1 = \text{نہیا}_{\frac{p}{q} \leftarrow (مس طه)}$

تو لوک  $1 = \text{نہیا}_{\frac{p}{q} \leftarrow (مس طه)} \text{جم طه} \times \text{لوک } (مس طه) = \text{نہیا}_{\frac{p}{q} \leftarrow (مس طه)} \frac{\text{لوک مس طه}}{\text{قط طه}}$

$$= \text{نہیا}_{\frac{p}{q} \leftarrow (مس طه)} \frac{\frac{1}{مس طه} \times \text{قط طه}^2}{\frac{\text{قط طه}}{مس طه}} = \text{نہیا}_{\frac{p}{q} \leftarrow (مس طه)} \frac{\text{قط طه}^2}{\text{قط طه}}$$



$$= \text{نہا} \frac{\text{جم ط}}{\text{جب ط}} = \text{صفر}$$

$$= ۱ = ۱ = \text{نہا} \frac{\text{مس ط}}{\text{جم ط}}$$

$$(۲۳) \text{ نہا} \frac{۱}{۱+۱} (۲۴) \text{ نہا} \frac{\text{جم لا}}{\text{جم لا}} \text{ جب لا}$$

$$(۲۵) \text{ نہا} \frac{۱}{۱+۱} (۲۶) \text{ نہا} \frac{\text{جم ط}}{\text{جم ط}} \text{ جب ط}$$

$$(۲۷) \text{ نہا} \frac{۱}{۱+۱} (۲۸) \text{ نہا} \frac{\text{جم لا}}{\text{جم لا}} \text{ جب لا}$$

$$(۲۹) \text{ نہا} \frac{\text{مس لا}}{\text{مس لا}} (۳۰) \text{ نہا} \frac{\text{لوک لا}}{\text{لوک لا}} \text{ لوک لا}$$

$$(۳۱) \text{ نہا} \frac{\text{مس لا}}{\text{مس لا}} \text{ جب لا} (۳۲) \text{ نہا} \frac{\text{جم لا}}{\text{جم لا}} \text{ جب لا}$$

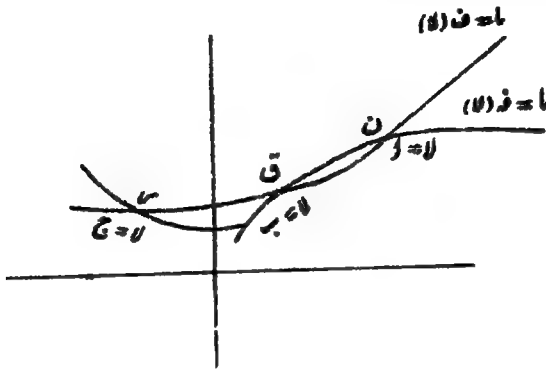
$$(۳۳) \text{ نہا} \frac{\text{جم م ط}}{\text{جم م ط}}$$

۶۵۶۔ تماس :- کسی منحنی کے تماس سے وہ خط مر

ہے جو منحنی کے دو نقطوں میں سے گزرے جبکہ انتہا میں نقطے ایک دوسرے پر منطبق ہو جائیں پس تماس منحنی میں دو منطبق نقطے مشترک ہوتے ہیں اور خط کی اس حالت کو مس کرنا کہتے ہیں یا یوں بھی بیان کرتے ہیں کہ خط منحنی کے ساتھ پہلے رتبہ کا تماس رکھتا ہے۔ اسی طرح اگر ایک منحنی دوسرے منحنی کو دو منطبق نقطوں میں کاٹے تو ایک منحنی دوسرے منحنی کو مس کر گیا اور ان کے درمیان پہلے رتبہ کا تماس ہوگا۔ اور اگر تین منطبق نقطوں پر کاٹے تو دوسرے رتبہ کا تماس۔ پس اگر دو منحنی ایک دوسرے کو ن منطبق نقطوں پر کاٹیں تو (ن-۱) رتبہ کا تماس کہلاتا ہے۔

فرض کرو کہ دو منحنی م = ف (لا) اور م = فہ (لا) ایک دوسرے کو دو نقطوں ن اور ق پر کاٹتے ہیں اور انتہا میں جب یہ نقطے منطبق

ہو جاتے ہیں تو منحنیوں کا پہلے رتبہ کا تماس ہوتا ہے۔



اب تعامل ف (۱) = ف (۱) - ف (۱) پر غور کرو۔ نقطہ ن اور ق اور ف (۱) صفر ہے اور مسلسل ہے اس لیے رول کے سلسلہ سے ف (۱) تقاطع اور ق کے درمیان کسی نقطہ پر صفر ہوگا۔ اب اگر نقطہ ق 'ن' پر منطبق ہو جائے تو ف (۱) کو بھی ن پر صفر ہونا پڑیگا۔

یعنی ف (۱) = ۰ = ف (۱) - ف (۱)

اس لیے پہلے رتبہ کے تماس کے لیے ضروری اور کافی شرط ہے کہ

$$\begin{cases} ف (۱) = ف (۱) \\ ف (۱) = ف (۱) \end{cases}$$

اگر منحنی تین نقطوں 'ن'، 'ق' اور 'س' پر کاٹتے ہیں تو اوپر کی دلیل سے ظاہر ہے کہ ف (۱) = ف (۱) = ف (۱) = ۰ جہاں لا تقاطع اور ق کے درمیان ہے اور لا نقاط ق اور س کے درمیان ہے۔ اس پر مکرر رول کا مسئلہ استعمال کرنے سے

ف (۱) = ۰ جہاں لا نقاط لا اور لا کے درمیان ہے۔ اب اگر 'ن'، 'ق'، 'س' کے نقطہ پر اکٹھے ہو جائیں تو لا اور لا کو بھی ن پر واقع ہونا ضروری ہوگا اور اس لیے دوسرے رتبہ کے

تماس کے لیے ضروری اور کافی شرط ہے کہ

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ف} (1) = \text{ف} (1) \\ \text{ف} (1) = \text{ف} (1) \\ \text{ف} (1) = \text{ف} (1) \end{array} \right.$$

اسی طرح ن ویں رتبہ کے تماس کے لیے ضروری اور کافی شرط ہے کہ  
 ف (1) = ف (1) ، ف (1) = ف (1) ، ... ف (1) = ف (1) ، ف (1) = ف (1)  
 مثال (۱)۔ بتاؤ کہ منحنی ما = جب لا اور ما = لا - لا کا مبداء پر  
 کون سے رتبہ کا تماس ہے۔ ظاہر ہے کہ مبداء پر دونوں منحنی ایک دوسرے  
 کو کاٹتے ہیں۔

دونوں منحنیوں کے ڈھال بالترتیب جم لا اور ا - لا ہیں جو مبداء پر  
 مساوی ہیں۔

دوسرے مشتق ہیں - جب لا اور لا اور یہ بھی مساوی ہیں۔  
 تیسرے مشتق ہیں - جم لا اور ا - اور یہ بھی مساوی ہیں۔  
 چوتھے مشتق ہیں - جب لا اور صفر اور یہ بھی مساوی ہیں۔  
 پانچویں مشتق نامساوی ہیں۔ اس لیے ان دونوں منحنیوں میں چوتھے  
 رتبہ کا مبداء پر تماس ہے۔

(۲) منحنیات ا - طے اور ا - طے + طے کا جم طے سے  
 تماس دریافت کرو۔

(۳) منحنیات لا اور لا - لا + لا کا جب لا سے مبداء پر  
 تماس دریافت کرو۔

(۴) منحنیات لا اور لا - لا + لا کا تماس دریافت کرو۔

(۵) منحنیات مس (لا + طے) اور (۲ لا + لا + ۱) کی ترسیمیں

کھینچو اور باہمی تماس دریافت کرو۔  
 (۶) جم لا اور ا - لا کی ترسیمیں کھینچو اور باہمی تماس دریافت کرو۔

(۷) ثابت کرو کہ دائرہ لا + ما - لا + ما = ۱۶ = نقطہ (۲-۳) پر منحنی ما =  $\frac{لا}{۴}$  - ۱۲ -  $\frac{۱}{۳}$  سے دوسرے رتبہ کا تماس رکھتا ہے۔

۶۶۷۔ انخنا :- منحنی کے گولائی پن کے آپ کی بہت

سی تعریفیں کی گئی ہیں ان میں سے دو تعریفیں اہم ہیں۔ ایک تعریف تو اس طرح کی جاتی ہے کہ منحنی کے تین متصل نقطوں میں سے ایک دائرہ کو گزاردو۔ اب دائرہ کو ایسے بدل دو کہ تین نقطوں میں سے دو نقطے منحنی پر حرکت کرتے ہوئے تیسرے نقطے پر منطبق ہو جائیں تو دائرہ کی ایک انتہائی وضع ہوگی۔ اس دائرہ سے اس نقطہ پر منحنی کی گولائی کا معیار مقرر کیا جاتا ہے اور اسے دائرۃ انخنا کہتے ہیں۔ اس کا نصف قطر منحنی کا نصف قطر انخنا کہلاتا ہے اور دائرہ کے مرکز کو مرکز انخنا کہتے ہیں۔ نیز نصف قطر کو منحنی کا انخنا کہتے ہیں۔ گزشتہ دفعہ سے ظاہر ہے کہ دائرہ اور منحنی میں دوسرے رتبہ کا تماس ہے۔ اس لیے بعض مصنف اسس دائرہ کو لٹھی دائرہ بھی کہتے ہیں۔ دوسرے رتبہ کے تماس کے لیے ضروری ہے کہ زیر غور نقطے پر منحنی اور دائرہ کے دھال اور دوسرے مشتق مساوی ہوں۔ ان شرائط سے دائرہ کی مساوات میں نامعلوم مقداروں کی قیمتیں حاصل کی جاتی ہیں۔

۶۶۸ :- منحنی ما = ف (لا) کے کسی نقطہ (لا، ما) پر دائرۃ انخنا کی مساوات مطلوب ہے۔ فرض کرو کہ دائرۃ انخنا کی مساوات ہے (لا - عہ) + (ما - بہ) = ر اور اس لیے مرکز کے محدود (عہ، بہ) ہونگے اور نصف قطر ہوگا۔ یہ تینوں چیزیں نامعلوم ہیں اور انہیں معلوم کرنے کے لیے تین مساوات درکار ہیں جو دوسرے رتبہ کے تماس کی تین شرائط سے حاصل ہوتی ہیں۔

پہلی شرط سے نقطہ (لا، ما) دائرہ پر واقع ہے یعنی (لا - عہ) + (ما - بہ) = ر

دائرہ کی مساوات کو تفریق کرنے سے (لا - ع) + (ما - بہ) فرما =  $\frac{فرما}{فرلا}$  .

$$\therefore \frac{فرما}{فرلا} = \frac{لا - ع}{ما - بہ}$$

$$اور \frac{فرما}{فرلا} = \frac{1}{ما - بہ} + \frac{لا - ع}{فرلا}$$

$$= \frac{1}{ما - بہ} - \frac{1}{(ما - بہ) + 1} = \frac{فرما}{فرلا}$$

اب تماس کی باقی دو شرطوں سے ظاہر ہوئے کہ  $\frac{فرما}{فرلا}$  اور  $\frac{فرما}{فرلا}$  کی قیمتیں اس نقطہ پر منحنی اور دائرہ کے لیے ایک ہی ہونی چاہئیں۔ منحنی کے لیے ان کی قیمتیں معلوم ہیں اس لیے دائرہ کے لیے معلوم ہوں گیں۔ امتیاز کرنے کے لیے ان مشترک قیمتوں کو  $\frac{فرما}{فرلا}$  اور  $\frac{فرما}{فرلا}$  سے تعبیر کر سکتے ہیں۔ پس

$$\frac{فرما}{فرلا} = \frac{لا - ع}{ما - بہ} + \frac{فرما}{فرلا} = \frac{1}{(ما - بہ) + 1} = \frac{فرما}{فرلا}$$

$$\therefore \frac{1}{(ما - بہ) + 1} = \frac{فرما}{فرلا} اور لا - ع = (ما - بہ) \frac{فرما}{فرلا} = \frac{فرما}{فرلا} \frac{1}{(ما - بہ) + 1}$$

اب ر معلوم کرنے کے لیے ما - بہ اور لا - ع کی قیمتیں دائرہ کی مساوات میں درج کرو:

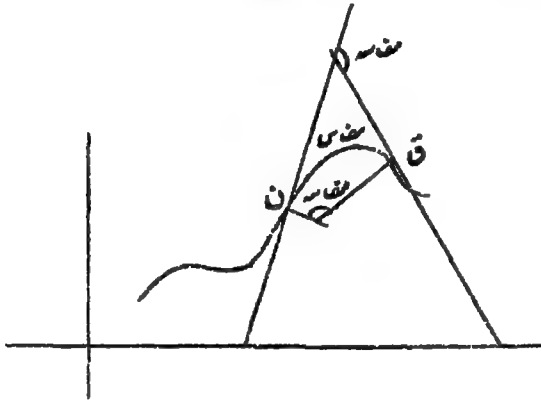
$$ر = (لا - ع) + (ما - بہ)$$

$$= \frac{1}{(ما - بہ) + 1} + \frac{1}{(ما - بہ) + 1} = \frac{2}{(ما - بہ) + 1}$$



$$\frac{\frac{3}{4} \left[ \left( \frac{r_2}{r_1} \right) + 1 \right]}{\frac{r_2}{r_1}} = r \quad \text{اور نیچے کی طرف مقعر ہو تو}$$

۶۷۸۔ انحنائی دوسری تعریف :-  
فرض کرو کہ مغنی پر دو متصل نقطے ن اور ق ہیں اور ان کے درمیان



فاصلہ مغنی ہے اور عماسوں یا عمادوں کے درمیان زاویہ مغنی ہے۔  
تو انحنائی دوسری تعریف کے مطابق مغنی  $\frac{مغنی}{فرس}$  کی انتہا کو انحنائی کہتے ہیں جبکہ  
ق نقطہ ن کے بے حد قریب آجائے۔



دائرہ کی صورت میں مغنی = ۱ مغنی  
جہاں ۱ دائرہ کا نصف قطر ہے۔

$$\therefore \text{نسبہ } \frac{مغنی}{فرس} = \frac{فرس}{فرس} = \frac{۱}{۱}$$

$\therefore \frac{فرس}{فرس} = ۱$  چونکہ دائرہ کی صورت میں  $\frac{فرس}{فرس}$  دائرہ کے نصف قطر کے

برابر ہے اس لیے منحنی کی صورت میں بھی  $\frac{\text{فرس}}{\text{فرلا}}$  نصف قطر انحناء کہلاتا ہے۔ اور منحنی کے عماد پر نصف قطر کی دوری والا نقطہ مرکز انحناء۔ انحناء کی یہ تعریف بہت سادہ ہے اور اس سے تمام محد دوں میں نصف قطر کے لیے جملے آسانی سے حاصل ہو سکتے ہیں۔ کارٹینری محد دوں میں

$$r = \frac{\text{فرس}}{\text{فرسہ}} = \frac{\text{فرس}}{\text{فرلا}} \times \frac{\text{فرلا}}{\text{فرسہ}}$$

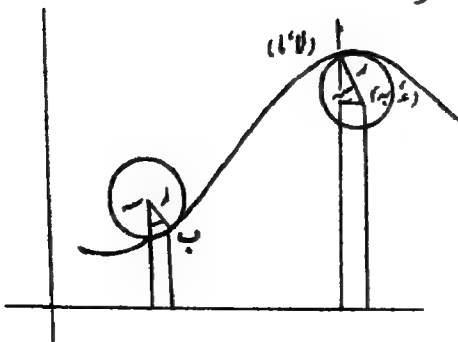
$$= \pm \left[ 1 + \left( \frac{\text{فرلا}}{\text{فرلا}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \times \frac{\text{فرلا}}{\text{فرسہ}}$$

$\frac{\text{فرلا}}{\text{فرسہ}}$  معلوم کرنے کے لیے  $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرلا}} = \text{مس}$  سے کو تفرق کرو تو

$$\frac{\text{فرلا}^2}{\text{فرلا}} = \text{قط}^2 \text{ سے } \times \frac{\text{فرسہ}}{\text{فرلا}}$$

$$\therefore \frac{\text{فرلا}}{\text{فرسہ}} = \frac{1 + \left( \frac{\text{فرلا}}{\text{فرلا}} \right)^2}{\frac{\text{فرلا}^2}{\text{فرلا}}}$$

$$\therefore r = \pm \frac{\left[ 1 + \left( \frac{\text{فرلا}}{\text{فرلا}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{\frac{\text{فرلا}^2}{\text{فرلا}}}$$



مرکز کے محد (عم' بہ) دریافت کرنے کے لیے شکل پر غور کرو۔ نقطہ 'ا' پر منحنی نیچے کی طرف مقعر ہے اور

$$\text{عم} = \text{لا} + \text{رجب سے}$$

$$\text{بہ} = \text{ما} - \text{رجم سے}$$

لیکن نقطہ 'ب' پر منحنی اوپر کی طرف مقعر ہے





دریافت کرو:-

$$(۲) \quad ۱ = ۱ \text{ کے نقاط } (۱'۱) \text{ اور } (۲-۱) \text{ اور } \left(\frac{۱}{۸} \frac{۱}{۴}\right)$$

$$(۳) \quad ۱ = ۱ \text{ کے نقاط } \left(\frac{۱}{۲} \frac{۱}{۴}\right) \text{ اور } (۲-۲)$$

$$(۴) \quad ۱ = \frac{۱}{۲} \pm \frac{۱}{۲} \text{ کے نقطہ } (۰'۱)$$

$$(۵) \quad ۱ = \frac{۱}{۲} \left(\frac{۱}{۲}\right) + \frac{۱}{۲} \left(\frac{۱}{۲}\right) \text{ کے نقطہ } (۰'۰)$$

(۶) تبدیلی مساوات کی صورت میں کسی نقطہ پر انہما کے مرکز کے محدود اور نصف قطر دریافت کرو:-

فرض کرو کہ منحنی کی مساوات ہے  $۱ = ۱$  ف (ت) اور  $۱ = ۱$  ذ (ت)

$$۱ = ۱ \text{ ف (ت) } = ۱ \text{ ذ (ت) } \text{ اس لیے } \frac{۱}{۱} = \frac{۱}{۱} \text{ ف (ت) } = \frac{۱}{۱} \text{ ذ (ت)}$$

$$\frac{۱}{۱} \times \left(\frac{۱}{۱}\right) = \frac{۱}{۱}$$

$$\frac{(۱) \left(\frac{۱}{۱}\right) - \frac{۱}{۱} \times \frac{۱}{۱}}{\left(\frac{۱}{۱}\right)} =$$

$$\frac{\frac{۱}{۱} \times \left[\left(\frac{۱}{۱}\right) + \left(\frac{۱}{۱}\right)\right]}{\left[\frac{۱}{۱} \frac{۱}{۱} - \frac{۱}{۱} \frac{۱}{۱}\right]} + ۱ = ۱$$

$$\frac{\frac{۱}{۱} \left[\left(\frac{۱}{۱}\right) + \left(\frac{۱}{۱}\right)\right]}{\frac{۱}{۱} \frac{۱}{۱} - \frac{۱}{۱} \frac{۱}{۱}} - ۱ = ۱$$

$$\frac{\frac{2}{3} \left[ \left( \frac{2}{\text{وقت}} \right) + \left( \frac{2}{\text{وقت}} \right) \right]}{\frac{2}{\text{وقت}} - \frac{2}{\text{وقت}}} = \text{اور س}$$

(۷) لا = ۳ ت = ۱ - ۳ ت کے نقطہ ت = ۱ پر  
انحنا اور مرکز انحنا کے محدود دریافت کرو۔

(۸) لا = ۴ جب ط = ۱ جم ط = ۲ کے نقطہ لا = ۲ پر  
نصف قطر انحنا دریافت کرو۔

(۹) ثابت کرو کہ لا = ۱ جم ط = ۱ جب ط کے کسی نقطہ پر  
نصف قطر انحنا = ۳ جب ط جم ط

(۱۰) لا = لا - لا میں اعظم اور اقل نقطوں پر انحنا معلوم کرو۔

(۱۱) لا = لا - لا پر وہ نقاط معلوم کرو جہاں انحنا اعظم  
یا اقل ہے۔

$$(۱۲) \frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \text{ میں کسی نقطہ پر مرکز انحنا کے محدود}$$

معلوم کرو اور برہنجیہ کی مساوات حاصل کرو۔  
ذیل کے متغیوں میں کسی نقطہ (لا، ۱) پر نصف قطر انحنا اور انحنا کے مرکز کے  
محدود دریافت کرو۔

$$(۱۳) لا = ۱$$

$$(۱۴) ب' لا - لا' = لا' ب'$$

$$(۱۵) لا' = لا + لا'$$

$$(۱۶) لا = ۲ ت = ۱ - ۲ ت$$

$$(۱۷) لا = ۲ ت + ۱ = لا' ت$$

$$(۱۸) لا = جب ط = ۱$$

$$(۱۹) \quad لا = ا - جم طه \quad ما = طه - جب طه$$

$$(۲۰) \quad ما = لوک قطا$$

$$(۲۱) \quad زائد ۲ لا ما = ا کے لیے ثابت کرو کہ$$

$$عہ + ہ = \frac{(لا + ما)^2}{۲} \quad \text{اور} \quad عہ - ہ = \frac{(لا - ما)^2}{۲}$$

اور اس سے برہیچہ کی مساوات نکالو۔

$$(۲۲) \quad ما^2 = ا^2 لا کے مرکز انحناء کے محدود اور نصف قطر دریافت کرو۔$$

بالخصوص مبداء پر ان کی قیمتیں حاصل کرو۔



# جوابات

مشقی سوالات (۱) صفحہ ۱۳

$$\begin{aligned}
 & 21 \quad \infty \quad \frac{13}{12} \quad 5 - \frac{1}{12} \quad (3) \quad 294 - 4 - 2 \quad 18 \quad 8 \quad (1) \\
 & (3) \quad 12(2 - \frac{1}{2}) + 12(2 + \frac{1}{2}) + 12(2 + \frac{1}{2}) + 12(2 + \frac{1}{2}) \\
 & \infty \quad (5) \quad 12(2 + \frac{1}{2}) + 12(2 + \frac{1}{2}) + 12(2 + \frac{1}{2}) + 12(2 + \frac{1}{2}) \\
 & 1 \quad 1 \quad (12) \quad 12 \quad 2 - 2 \quad \frac{2}{12} \quad 0 \quad (11) \quad \text{غير معين} \\
 & 12 + 2 - \frac{1}{12} \quad 2 - \frac{1}{12} \quad 2 + \frac{1}{12} \quad (15) \quad \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \quad (13) \quad 12 - 2 \quad (13) \\
 & (1 + 2 + 12) \quad 2 \quad (16) \quad \frac{1}{1 + 2} + 1 - 1 + 2 \quad 2 \quad 5 \quad 2 \quad \frac{1}{4} \quad (17) \\
 & \frac{1}{12} \quad (22) \quad \frac{1}{2 + 1} - (18)
 \end{aligned}$$

مشقی سوالات (۲) صفحہ ۳۰

(۱) صفر (۲)  $\infty$  (۳) صفر، صفر، صفر  
(۴) صفر (۵) صفر (۶)  $\infty$  (۷) توان غیر محدود است از  
کتاب - (۸) ۱۰۰۰

## مشقی سوالات (۳) صفحہ ۳۹

$$\frac{1}{4} (1) \quad \frac{1}{3} (2) \quad \frac{1}{2} (3) \quad \frac{1}{4} (4) \quad \frac{1}{5} (5) \\ (4) \text{ توازن محدد و ہتھوڑا کرتا ہے۔} \quad \frac{1}{3} (6) \quad \frac{2}{3} (8) \quad -$$

## مشقی سوالات (۴) صفحہ ۵۵

$$1 - (5) \quad \frac{1}{3} (4) \quad \frac{1}{2} (3) \quad \frac{2}{3} - (2) \quad \frac{1}{4} (1) \\ \frac{1}{4} (11) \quad 1 (10) \quad 3 (9) \quad 4 (8) \quad 2 - (6) \quad 1 (4) \\ 8 - (14) \quad \frac{2}{9} - (17) \quad 2 (15) \quad \frac{1}{4} (12) \quad \frac{2}{3} (13) \quad 2 (12) \\ 1 (23) \quad \frac{2}{5} (22) \quad \frac{2}{3} (21) \quad 1 - (20) \quad \frac{2}{3} (19) \quad 1 (18) \\ \infty (30) \text{ صفر (29)} \quad 1 - (28) \text{ صفر (27)} \quad 2 (25) \text{ صفر (24)} \\ \frac{1}{12} - (39) \quad \frac{1}{4} (35) \quad \infty (34) \text{ صفر (33)} \quad \frac{2}{3} (32) \text{ صفر (31)} \\ (36) - 12 (38) \quad \frac{2}{3} (39) \quad \frac{1}{4} (40) \text{ صفر (41) صفر -}$$

## مشقی سوالات (۵) صفحہ ۷۰

$$(5) (d) \text{ لا} = \frac{2}{3} \quad (b) \text{ لا} = 1 \quad (ج) \text{ لا} = \pm \frac{\pi}{4} \quad (ن) = (0, 2, 4, 6, \dots) \\ (d) \text{ لا} = 3 - 2 - 2 - 2 = 0 \quad (b) \text{ لا} = \pm \frac{\pi}{4} (1 + 0.2) \quad (ن) = (0, 2, 4, 6, \dots) \\ (و) \text{ لا} = \pm \frac{\pi}{4} (1 + 0.2) \quad (ن) = (0, 2, 4, 6, \dots) \\ (4) 24$$

## مشقی سوالات (۴) صفحہ ۹۴

- (۱) ۲ (۲)  $\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}$  (۳)  $\frac{1}{2}$  (۴)  $\frac{1}{2}$  (۵)  $\frac{1}{2}$  (۶)  $\frac{1}{2}$  (۷)  $\frac{1}{2}$  (۸)  $\frac{1}{2}$  (۹)  $\frac{1}{2}$  (۱۰) صفر (۱۱)  $\frac{1}{2}$  (۱۲)  $\frac{1}{2}$  (۱۳)  $\frac{2}{3}$  (۱۴)  $\frac{1}{1-2}$  (۱۵)  $\frac{3}{4}$

## مشقی سوالات (۶) صفحہ ۹۸

- (۱) ۲ (۲)  $\frac{2}{3}$  (۳) ۱ (۴)  $\frac{2}{3}$  (۵) صفر (۶) ۱ (۷) ۱ (۸) ۲ (۹)  $\frac{2}{3}$  (۱۰) جب ب - ع جم

## مشقی سوالات (۸) صفحہ ۱۰۲

- (۱) (۱)  $\frac{14}{9} - \frac{8}{9} = \frac{6}{9}$  (۲)  $\frac{54}{25} - \frac{55}{9} = \frac{486}{225} - \frac{1375}{225} = -\frac{889}{225}$  (۳)  $\frac{953}{250} - \frac{524}{250} = \frac{429}{250}$  (۴)  $\frac{143}{2} - \frac{123}{2} = \frac{20}{2} = 10$  (۵)  $\frac{125}{21 \times 3} - \frac{250}{21 \times 3} = -\frac{125}{63}$  (۶)  $\frac{2}{121} - \frac{105}{10516} = \frac{2}{121} - \frac{105}{10516}$  (۷)  $\frac{129}{25} - \frac{92}{25} = \frac{37}{25}$  (۸) (۱)  $\frac{5}{2} - \frac{(1-2)}{2} = \frac{5}{2} - \frac{-1}{2} = \frac{6}{2} = 3$



$$(ب) \frac{\sqrt{31}-2}{2} , \frac{\sqrt{31}-\sqrt{21}}{2}$$

$$(ج) \frac{5}{\pi} (1-\sqrt{3}) - \infty$$

$$(د) \infty + \sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{31}} - \sqrt{21}$$

مشقی سوالات (۹) صفحہ ۱۰۷

$$(۱) (۱) \sqrt{28}, \sqrt{2}, \sqrt{4}, \sqrt{21}, \sqrt{25}, \sqrt{241} (2) \left( \frac{3001}{910} + 3 \right)$$

$$(ب) \sqrt{1-\frac{3}{4}} \pm \sqrt{1-\frac{5}{\pi}} \pm \sqrt{1-\frac{1}{510}}$$

$$(ج) \frac{\text{جب } \left( \frac{\pi}{9} \pm \frac{\pi}{3} \right) \text{ جب } \frac{\pi}{9} \pm \frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{180} \pm \frac{\pi}{360}}$$

$$\frac{\text{جب } \left( \frac{\pi}{360} \pm \frac{\pi}{36} \right) \text{ جب } \frac{\pi}{360} \pm \frac{\pi}{36}}{\frac{\pi}{360} \pm \frac{\pi}{36}}$$

$$(د) \frac{\text{مس } \left( \frac{\pi}{360} \pm \frac{\pi}{54} \right) \text{ مس } \frac{\pi}{54}}{\frac{\pi}{540} \pm \frac{\pi}{54}} , \frac{\text{مس } \left( \frac{\pi}{360} \pm \frac{\pi}{36} \right) \text{ مس } \frac{\pi}{36}}{\frac{\pi}{360} \pm \frac{\pi}{36}}$$

$$(۵) \frac{11 \times 25}{(\frac{25}{910} \pm 29) 29} , \frac{11 \times 25}{(\frac{15}{910} \pm 29) 29}$$

$$(و) \frac{410 -}{36 \times 36 \times 36}$$

$$(۴) \sqrt{2} - \sqrt{2} - 1$$

مشقی سوالات (۱۰) صفحہ ۱۱۰

$$(۱) \sqrt{2} , \sqrt{6} , \sqrt{3} , \sqrt{2} , \sqrt{2} + \sqrt{2} , \sqrt{5} - \sqrt{3}$$

بعض کے نتیجے میں کم کر



$$\begin{aligned}
 (18) & \quad \frac{3(2+u)}{3} + m \\
 (19) & \quad \frac{3}{2} - \frac{3}{2} + m \\
 (20) & \quad \frac{3(1+u)}{3} + m \\
 (21) & \quad \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + m \\
 (22) & \quad \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + m \\
 (23) & \quad \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + m \\
 (24) & \quad \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + m \\
 (25) & \quad \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + m
 \end{aligned}$$

### مشقی سوالات (۱۳) صفحہ ۱۱۶

$$\begin{aligned}
 (1) & \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
 (2) & \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
 (3) & \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
 (4) & \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
 (5) & \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
 (6) & \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
 (7) & \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
 (8) & \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
 (9) & \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
 (10) & \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
 (11) & \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
 (12) & \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
 (13) & \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (15) \quad & \frac{2}{3} (1-11) (3+112-11) \frac{2}{3} (14) \frac{2}{3} (1-11) \frac{2}{3} (1-11) \\
 & + \frac{2}{3} (1-11) \frac{2}{3} (1-11) \frac{2}{3} (1-11) \frac{2}{3} (1-11) \\
 (16) \quad & + \frac{2}{3} (1-11) \frac{2}{3} (1-11) \frac{2}{3} (1-11) \frac{2}{3} (1-11) \\
 & + \frac{2}{3} (1-11) \frac{2}{3} (1-11) \frac{2}{3} (1-11) \frac{2}{3} (1-11) \\
 (20) \quad & + \frac{2}{3} (1-11) \frac{2}{3} (1-11) \frac{2}{3} (1-11) \frac{2}{3} (1-11) \\
 & + \frac{2}{3} (1-11) \frac{2}{3} (1-11) \frac{2}{3} (1-11) \frac{2}{3} (1-11) \\
 (22) \quad & + \frac{2}{3} (1-11) \frac{2}{3} (1-11) \frac{2}{3} (1-11) \frac{2}{3} (1-11) \\
 & + \frac{2}{3} (1-11) \frac{2}{3} (1-11) \frac{2}{3} (1-11) \frac{2}{3} (1-11) \\
 (23) \quad & + \frac{2}{3} (1-11) \frac{2}{3} (1-11) \frac{2}{3} (1-11) \frac{2}{3} (1-11) \\
 & + \frac{2}{3} (1-11) \frac{2}{3} (1-11) \frac{2}{3} (1-11) \frac{2}{3} (1-11) \\
 (24) \quad & + \frac{2}{3} (1-11) \frac{2}{3} (1-11) \frac{2}{3} (1-11) \frac{2}{3} (1-11) \\
 & + \frac{2}{3} (1-11) \frac{2}{3} (1-11) \frac{2}{3} (1-11) \frac{2}{3} (1-11) \\
 (25) \quad & + \frac{2}{3} (1-11) \frac{2}{3} (1-11) \frac{2}{3} (1-11) \frac{2}{3} (1-11) \\
 & + \frac{2}{3} (1-11) \frac{2}{3} (1-11) \frac{2}{3} (1-11) \frac{2}{3} (1-11) \\
 (26) \quad & + \frac{2}{3} (1-11) \frac{2}{3} (1-11) \frac{2}{3} (1-11) \frac{2}{3} (1-11) \\
 & + \frac{2}{3} (1-11) \frac{2}{3} (1-11) \frac{2}{3} (1-11) \frac{2}{3} (1-11)
 \end{aligned}$$

### مشقی سوالات (۱۴) صفحہ ۲۱

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & 2-2 \text{ جب } 2 (3+2) (2) \frac{9}{2} \text{ جب } \frac{3}{2} (3) \text{ جم } \frac{3}{2} \\
 (3) \quad & 2 \text{ جم } 2 (3-2) 2 \text{ مس } 2 \text{ قط } 2 (4) \text{ جم } 2 \text{ ط } \\
 (5) \quad & 2 \text{ جم } 2 (3-2) 2 \text{ جم } 2 - \text{ جب } 2 (3-2) \text{ جب } 2 \text{ ط } \\
 (6) \quad & 2-2 \text{ قم } 2 (2) \text{ مم } 2 (2) (6) 2 \text{ قط } 2 (2-2) \text{ مس } (2-2) \\
 (8) \quad & 2 \text{ قط } 2 (1+2) 3 \text{ قم } (1+2) \text{ مم } (1+2) \\
 (9) \quad & \text{جم } (1+2) \text{ جم } (2-2) 2 \text{ جب } (1+2) \text{ جب } (2-2)
 \end{aligned}$$

$$(10) 3 \text{ قط} (2-2\lambda+2\lambda^2) \text{ مس} (2+2\lambda^2-2\lambda^3) \times (2+2\lambda^2-2\lambda^3) - (2-2\lambda+2\lambda^2) \text{ قلم} (2-2\lambda+2\lambda^2) \text{ مم} (2-2\lambda+2\lambda^2)$$

$$(11) -\frac{1}{4} \text{ جم} (2+2\lambda+2\lambda^2) + \text{مس} (2-2\lambda+2\lambda^2) \text{ جب} (2-2\lambda+2\lambda^2) + \text{م}$$

$$(13) \frac{1}{4} \text{ مس} (2-2\lambda+2\lambda^2) + \text{م} (14) \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right) \text{ جب} (2-2\lambda+2\lambda^2) + \text{م}$$

$$(15) \frac{(2 \text{ جب} 2 - 6 \text{ جم} 2) \text{ م}}{2} + (14) - \frac{1}{4} \text{ مم} (2-2\lambda+2\lambda^2) + \text{م}$$

### مشقی سوالات (15) صفحہ ۱۲۲

$$(1) (2+2\lambda^2) \text{ قلم} (2-2\lambda+2\lambda^2) - (2) (1+2\lambda+2\lambda^2) (1+2\lambda+2\lambda^2)$$

$$(3) \frac{4 (1-2\lambda+2\lambda^2) (2+2\lambda+2\lambda^2)}{2 (2+2\lambda+2\lambda^2)} (2) \frac{10 \text{ جم} 2 - (2-2\lambda+2\lambda^2) \text{ جب} 2}{2 (2+2\lambda+2\lambda^2)}$$

$$(5) \frac{(2 \text{ مس} 2 + 2 \text{ جب} 2 - 2 \text{ قط} 2) \text{ لا} (2 \text{ جب} 2 + 2 \text{ لا} 2)}{2 (2 \text{ مس} 2 + 2 \text{ لا} 2)}$$

$$(4) 2 \text{ جب} 2 \text{ قط} 2 (2+2\lambda+2\lambda^2) + \text{جم} 2 \text{ مس} (2-2\lambda+2\lambda^2) + \text{م}$$

$$(6) \text{ جم} (2+2\lambda+2\lambda^2) \text{ جم} (2-2\lambda+2\lambda^2) - \text{جب} (2+2\lambda+2\lambda^2) \text{ جب} (2-2\lambda+2\lambda^2) = \text{جم} 2 \text{ م}$$

$$(8) \frac{(2 \text{ لا} + 2 \text{ جب} (2+2\lambda+2\lambda^2) \text{ لا} (2+2\lambda+2\lambda^2) \text{ جب} 2 + \text{جم} (2+2\lambda+2\lambda^2) \text{ لا} (2+2\lambda+2\lambda^2) \text{ لا} (2+2\lambda+2\lambda^2))}{2 (2+2\lambda+2\lambda^2)}$$

$$(9) \frac{(33+2\lambda+2\lambda^2) - (2-2\lambda+2\lambda^2) (2-2\lambda+2\lambda^2)}{2 (2-2\lambda+2\lambda^2)}$$

$$(10) \left[ \frac{4}{2+2\lambda+2\lambda^2} - \frac{28}{2+2\lambda+2\lambda^2} - \frac{(2+2\lambda+2\lambda^2)^2}{2-2\lambda+2\lambda^2} + \frac{8}{1-2\lambda+2\lambda^2} \right] \text{ م}$$

$$\frac{2 (2-2\lambda+2\lambda^2) (2-2\lambda+2\lambda^2)}{2 (2+2\lambda+2\lambda^2) 2 (2+2\lambda+2\lambda^2)} = \text{جاں م}$$

$$(11) [2 \text{ مس} 2 + 2 \text{ م} 2 + 2 \text{ م} 2 + 2 \text{ م} 2 - (2+2\lambda+2\lambda^2) \text{ م}] \text{ م}$$

$$\frac{\text{قط (۲ طه) مس ۳ طه}}{\text{جب (۴ طه + ۵)}} = ۱$$

$$(۱۲) (-) \text{ محم فہ ۲ - مس (۱ - فہ ۲) - ۲ محم (۱ - فہ ۲) + ۲ مس (۱ - فہ ۲) - \left( \frac{۱}{۲ + فہ} \right) ۱}$$

$$\frac{\text{قم فہ مم (۱ - فہ ۲) قط (۳ فہ)}}{۲ + فہ} = ۱$$

مشقی سوالات (۱۶) صفحہ ۱۲۶

$$(۱) \frac{(۱۶۲ + ۱) - ۱}{۲(۲ + ۱۶۲ + ۱)} \quad (۲) \frac{۱}{۱۱۶ - ۲۱۶۲}$$

$$(۳) \frac{۱}{۲ \text{ قم (۳ + ۱۶۲) محم (۳ + ۱۶۲)}} \quad (۴) \frac{۱۶۲ + ۳۱۶۲}{۱۶۲ - ۱۱۶۲ - ۱۶۲}$$

$$(۵) \frac{۱۶۲ - ۱۶۲ \text{ قط (۱ + ۱۶۲)}}{(۱۶۲ + ۱۶۲) ۱۶۲} \quad (۶) \frac{۱}{۱۶۲} \times \frac{\text{قط (۱۶۲ مس ۱۶۲)}}{\text{قط (۱۶۲ مس ۱۶۲)}}$$

$$(۷) \frac{۱ + \sqrt{۱۶۲}}{۱۶۲ + \sqrt{۱۶۲}} \quad (۸) \frac{۱}{۱۶۲} \quad (۹) \frac{۱۶۲ - ۱۶۲}{(۱۶۲ - ۱۶۲) ۱۶۲}$$

$$(۱۰) \frac{۱۶۲ - ۱}{۱۶۲ - ۱۶۲} \quad (۱۱) \frac{۱}{۱۶۲} \quad (۱۲) \frac{۲}{۳} \quad (۱۳) \frac{۲}{۳}$$

$$(۱۴) \frac{۱}{۲} \quad (۱۵) \frac{۲}{۳} - \frac{۲}{۳} - \frac{۲}{۳}$$

مشقی سوالات (۱۶) صفحہ ۱۳۱

$$(۱) \frac{۲ - \text{جب (۳ + ۱۶۲)}}{۱ - (۳ + ۱۶۲) ۲} \quad (۲) ۲ -$$

$$(۳) - \frac{1}{\sqrt{u}-\sqrt{v}} \quad (۴) \frac{1}{\sqrt{u}-\sqrt{v}} \quad (۵) \frac{1}{\sqrt{u}+\sqrt{v}}$$

$$(۶) \frac{1}{\sqrt{u}-\sqrt{v}} - \frac{1}{\sqrt{u}+\sqrt{v}} \quad (۷) \frac{1}{\sqrt{u}-\sqrt{v}}$$

$$(۸) \frac{1}{\sqrt{u}-\sqrt{v}} \quad (۹) \frac{1}{\sqrt{u}+1} + \frac{1}{\sqrt{u}-1}$$

$$(۱۰) \frac{1}{\sqrt{u}+1} + \frac{1}{\sqrt{u}-1} \quad (۱۱) \frac{1}{\sqrt{u}+1}$$

$$(۱۲) \frac{1}{\sqrt{u}-1} + \frac{1}{\sqrt{u}+1}$$

$$(۱۳) \frac{1}{\sqrt{u}-1} + \frac{1}{\sqrt{u}+1} + \frac{1}{\sqrt{u}-1}$$

$$(۱۴) - \frac{1}{\sqrt{u}-1} \times \frac{1}{\sqrt{u}+1} + \frac{1}{\sqrt{u}-1} \times \frac{1}{\sqrt{u}+1}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{u}-1} \times \frac{1}{\sqrt{u}+1} \times \frac{1}{\sqrt{u}-1}$$

$$(۱۵) \frac{1}{\sqrt{u}} \quad (۱۶) \frac{1}{\sqrt{u}} \quad (۱۷) \frac{1}{\sqrt{u}}$$

$$(۱۸) \frac{1}{\sqrt{u}} \quad (۱۹) \frac{1}{\sqrt{u}} \quad (۲۰) \frac{1}{\sqrt{u}}$$

$$(۲۱) \frac{1}{\sqrt{u}} \quad (۲۲) \frac{1}{\sqrt{u}}$$

$$(۲۳) \frac{1}{\sqrt{u}} \quad (۲۴) \frac{1}{\sqrt{u}}$$

$$(۲۵) \frac{1}{\sqrt{u}} \quad (۲۶) \frac{1}{\sqrt{u}}$$

$$\begin{aligned}
 (۲۳) \quad \frac{۱}{۲} \text{ جب } \frac{۱}{۵} \text{ لا} \quad (۲۴) \quad \text{جب } \frac{۱}{۲} \text{ لا} \\
 (۲۵) \quad \text{جب } \frac{۱}{۲} \text{ ب} - \frac{۱}{۲} \text{ ط} \quad (۲۶) \quad \frac{۱}{۸} \text{ جب } \frac{۱}{۳} \text{ لا} \quad (۲۷) \quad \frac{۱}{۲} \text{ قط } \frac{۱}{۲} \text{ لا} \\
 (۲۸) \quad \frac{۱}{۳} \text{ قط } \frac{۱}{۲} \text{ لا} \quad (۲۹) \quad \frac{۱}{۱۲} \text{ قط } \frac{۱}{۱۲} \text{ لا} \\
 (۳۰) \quad \left( \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۱۲} \text{ قط } \frac{۱}{۳} \right)
 \end{aligned}$$

### مشقی سوالات (۱۸) صفحہ ۱۳

$$\begin{aligned}
 (۱) \quad \frac{\text{لا جم لا} - \text{جب لا}}{\text{لا}} \quad (۲) \quad \frac{۱}{۱ - (۱ + \text{لا})} \\
 (۳) \quad \frac{۱}{\frac{۱}{۱ + \text{لا}}} \quad (۴) \quad \text{لا (لوک لا + ۱)} \\
 (۵) \quad \frac{\text{لا}}{۲} \times \frac{۱}{۲} (۱ + ۲ \text{ لوک لا}) \quad (۶) \quad \frac{۳ + ۲\text{لا} + ۱}{۵ - \text{لا} ۳ + ۲\text{لا} ۲} \\
 (۷) \quad \frac{۱}{۱ + \text{لا}} \quad (۸) \quad \frac{۱}{\frac{۱}{۱ + \text{لا}}} \times \frac{۱}{۱ + \text{لا}} \\
 (۹) \quad \left\{ \frac{\text{لوک لا} (۳ + ۲\text{لا})}{۲} + \frac{۳ + ۲\text{لا} ۸}{۱۳ + ۲\text{لا} ۴} \right\} \\
 (۱۰) \quad \text{جب مس لا (قط لا لوک جب لا + ۱)} \\
 (۱۱) \quad \text{مس لا (قط لا لوک مس لا + قط لا)} \\
 (۱۲) \quad \text{قط لا (تم لا مم لا لوک قط لا + قط لا)}
 \end{aligned}$$







$$(۳) \text{ جم } \left( \frac{۳+۵۲}{۱-۵} \right) \times \left( \frac{۵-}{۲(۱-۵)} \right) \text{ قط } \left( \frac{۱}{۵-۱} \right) \times \left( \frac{۱}{۲(۵-۱)} \right)$$

$$(۵) \frac{۲۶-}{۲۵۲-۱۶} \quad (۶) \frac{۲-}{(۲۵۳-۱)(۲۵۲-۱۶)}$$

$$(۷) \frac{۵۱۴-}{۱+۲۵۳-۲۵۵۳} \quad (۸) \frac{۲-}{۲۵۴-۱۶} \quad (۹) \frac{۱}{۲} \text{ جم } \frac{۱}{۲}$$

$$(۱۰) \frac{\text{لوک } ۵}{۲(۵+۱)} \quad (۱۱) - \text{قط } ۵ \quad (۱۲) \text{ قو } \frac{۲۵۳-۲}{۲(۵+۱)} \quad (۱۳) \frac{۱۴}{۲(۵-۱)(۲+۵)}$$

$$(۱۴) \frac{۱۴-۵}{۲۵-۲۵۱۶} - \frac{۱}{۵} \quad (۱۵) \frac{۵۹-}{۶۵}$$

$$(۱۶) \text{ قو } \frac{۵}{۲} \text{ (جب لا قط } ۲ \text{ لا + جم لا)}$$

$$(۱۷) \text{ قو } \frac{۵}{۲} \text{ (مس لا جب } ۲ \text{ لا + قط لا)} \quad (۱۸) \text{ قو } \frac{۵-}{۲}$$

$$(۱۹) \frac{\text{قو } ۵ + \text{قو } ۵}{۲} \quad (۲۰) \frac{۴}{۲(۵+۵)}$$

$$(۲۱) \text{ (جب لا)} \text{ مس لا } \left[ \text{قط لا لوک جب لا} + \frac{\text{مس لا}}{\text{جب لا } ۵-۱۶} \right]$$

$$(۲۲) \text{ (قم لا)} \text{ جب لا } \left[ \text{جم لا لوک قم لا} - \frac{\text{جب لا}}{\text{قم لا } ۱-۲۵۱۶ \times ۵} \right]$$

$$(۲۳) \frac{۱}{۲} \text{ لوک } (۲+۲۵۳) + \frac{۳}{۳۶۲} \text{ مس لا } \frac{۵۲}{۳۶}$$

$$(۲۴) \frac{۵-}{۱۵-} \text{ مس لا } \frac{۱}{۸۶} \text{ مس لا } \frac{۲+۵}{۸۶} \quad (۲۵) \frac{۱}{۸۶} \text{ مس لا } \frac{۲+۵}{۸۶}$$

$$(۲۶) \frac{۱}{۴} \text{ قو } + \text{مس لا } \frac{۱}{۴} \text{ جب لا } \frac{۵۲}{۳۶} + \text{مس لا}$$

$$(۲۸) \frac{1}{r} \text{ جب } 1 - \frac{5-11}{5} + م (۲۹) \frac{1}{5r} \text{ من } 1 - \frac{11}{5} + م$$

$$(۳۰) \frac{1}{15r} \text{ من } 1 - \frac{5}{r} + م (۳۱) \frac{1}{r} \text{ قضا } 1 - \frac{5}{r} + م$$

$$(۳۲) \text{ قضا } 1 - \frac{11}{r} + م (۳۳) \frac{1}{r} \text{ قضا } 1 - \frac{11}{r} + م$$

$$(۳۴) \frac{2}{39r} \text{ من } 1 - \frac{4+11}{39r} (۳۵) \frac{1}{r} \text{ لوک } \frac{1-11}{1+11}$$

$$(۳۶) \text{ لوک } \frac{2+11}{3+11} + م (۳۷) \frac{3}{r} \text{ لوک } (۳+11) - \frac{1}{r} \text{ لوک } (1+11)$$

$$(۳۸) \frac{1}{r} \text{ لوک قضا } (۳+11) (۳۹) \text{ لوک } \{ \text{قضا } (۳-11) + \text{من } (۳-11) \} + م$$

$$(۴۰) \frac{1}{r} \text{ جب } 1 - \frac{11}{r} (۴۱) \left[ 11 \times 2 + \dots + 11 \times 2 + 11 \times 2 \right]$$

$$(۴۲) \frac{11 \times 2}{2(11-1)} (۴۳) \left( -\frac{\pi}{2} + 11 \right) \text{ جم } 11$$

$$(۴۴) \frac{\pi}{2} \text{ جب } 11 + \left( \frac{\pi}{2} + 11 \right) (۴۵) \left[ 11 + (1 + 11) \text{ جم } (11) + \text{جب } (11) \right]$$

$$(۴۶) \frac{3}{r} \text{ من لوک } (11) \text{ قضا } (11) - (2 + 11) \text{ قضا } (11) + \text{من لوک } (11)$$

$$(۴۷) \left[ \frac{11 \text{ ط } (1-11)}{r} - \frac{1}{11 \text{ ط } (1-11)} \right] \text{ قضا } 11$$

$$(۴۸) \frac{[11 - 11]}{r(11 + 1)} (۴۹) \frac{1}{r} - \left[ \frac{11 - 11}{r} \right]$$

$$(۵۰) \frac{11 \text{ من } 11}{r(11 + 1)} (۵۱) \frac{11 \text{ من } (1 + 11)}{r(11 - 1)}$$

$$\frac{(j^2 + 1)^2}{j^2 j^2} - \frac{1}{j} - \frac{j}{j^2} - \frac{j}{j^2} \quad (52)$$











(ب) لا = ۶ - اعظم = صفر  
 لا = ۳ - اقل = ۱۹۶۸۳  
 لا = ۲ - اعظم = ۸۱۹۲  
 (ج) لا = ۱ - اعظم = صفر  
 لا =  $\frac{1}{2}$  - اقل =  $\frac{24}{63}$   
 لا =  $\frac{1}{2}$  - کچھ بھی نہیں  
 (د)  $(\frac{3}{2}, 0)$  اقل = لا =  $\frac{113 \pm 15}{8}$  اقل

۴۶۴ - صفحہ ۱۶۶

(۳) لا = ۱ - اقل = ۳

لا = ۱ - اعظم = ۳

(۴) لا = ۴ - اعظم = ۱

لا = ۱۶ - اقل = ۲۵

(۵) لا =  $\frac{1}{2}$  - اقل =  $\frac{24}{32}$  و

(۶) اعظم (۰، ۲) - اقل (۱، ۰)

(۷) لا = ۲ - اعظم = لا = ۲ - اقل

(۸) لا =  $\frac{\pi}{4}$  - اعظم  
 اقل =  $\frac{\pi}{4}$

(۹) لا = ۲ - اعظم =  $\frac{\pi}{3}$

لا =  $\frac{\pi}{3}$  - اقل

(۱۰) لا = ۵ - اقل  
 اعظم =  $\frac{1}{2}$   
 اقل = لا = ۱ -

(۱۳) مربع =  $\frac{1}{2\sqrt{2}}$  و مربع کا نصف قطر

$$\frac{۱}{۸} (۱۴)$$

$$۰.۶ (۱۵)$$

$$\frac{۱}{۳۶} = ۱ (۱۶)$$

$$۵ \text{ فٹ} (۱۷)$$

$$(۱۸) \text{ قاعدہ کا ضلع} = ۲۰ \text{ گہرائی} = ۱۰$$

$$\frac{\pi}{۳} (۱۹)$$

$$(۲۰) \text{ ر} = \text{نصف قطر} = ۱۰ = \sqrt{\frac{۴}{۲\pi}} \times ۶۵۰.۶$$

$$\text{ل} = \text{بلندی} = ۱۰ = \sqrt{\frac{۱۲}{۲\pi}} \times ۱۰۵۵ = \text{حجم} = ۳۳۰ \text{ مکعب فٹ}$$

۵۶۶۵ - صفحہ ۱۸۰

(۳) ان جفت ہوتو منحنی ہر جگہ مقعر۔ ن طاق ہو تو لا >، محدب۔

لا <، مقعر (۰.۶) نقطۃ انعطاف،

(۴) (۲'۰) (۲'۳) (۲'۳) (۲'۰) : کوئی نقاط انعطاف نہیں

قط لا مقعر (۲'۳ - ۲'۳) محدب (۲'۳ - ۲'۳)

قم لا " (۲'۰) محدب (۲'۳ - ۲'۳)

(۵) کوئی نقاط انعطاف نہیں۔ ولا ہمیشہ مقعر اور لوک لا ہمیشہ محدب۔

$$\frac{۱}{۲} - ۲ = ۱ (۶)$$

$$\frac{۲}{۳} ۰.۶ = ۱ (۷)$$

$$\frac{۵}{۳} = ۱ (۸)$$



(ج) ۳۶۶۳' ۳۶۲' ۲۸

۴۶۹۲ - صفحہ ۱۸۸

(۳) نصف قطر کے بڑھنے کی شرح =  $\frac{1}{\pi r} = 0.35$  د فی ثانیہسطح کے " " =  $\frac{17}{17}$  مربع انچ -

(۴) (۱) ۵ میل فی گھنٹہ (ب) ۲ میل فی گھنٹہ

(۵) ۱.۶ فٹ فی ثانیہ

(۶)  $\frac{1}{256}$  اکائیوں فی منٹ گھٹ رہا ہے -

(۷) (۱) ۱۸.۵ (ب) ۰.۴۵۵

(۸)  $\frac{2}{\pi r} = 55$  اکائی فی ثانیہ گھٹ رہا ہے - صفر(۹)  $\pi 25$  مکعب اکائیوں فی منٹ

(۱۰) ۴ میل

(۱۱)  $\frac{\pi 12 -}{\pi 12}$  ،  $\frac{\pi 128 -}{\pi 12}$ (۱۲)  $\frac{1}{\pi 4}$ 

مشقی سوالات (۲۲) صفحہ ۱۹۹

(۱)  $1 + \frac{1}{p} + k$  (۲)  $3 - 2 + 2 - 1 + k$ (۳)  $1 - 2 + 2 + k$  (۴)  $10 - 1 - \frac{1}{3} + k$ (۵)  $1 - 1 + 2 + 3 + k$  (۶)  $\frac{1}{12} + k$  (۷)  $\frac{1}{12} + k$ (۸) جب  $\frac{1}{p} + k$  (۹)  $\{3 - 2\} + 1 + k$ (۱۰)  $25 + 1 - 25 + k$  (۱۱)  $\{1 + 1\} + k$ (۱۲)  $1 - 1 + k$  (۱۳)  $1 - 1 + k$

$$(۱۳) ۲ - \text{محطه} - \text{ط} + \text{ک} \quad (۱۴) \frac{۱}{۱۱} \text{لا} + \frac{۱}{۱۰} \text{لوک} + (۱۵) \text{ک} + \text{لا}$$

### مشقی سوالات (۲۳) صفحہ ۲۰۹

$$(۱) \frac{۱}{۱۶} \text{لوک} + \frac{۱}{۸} \text{لا} + \frac{۲}{۸} \text{لا} + \frac{۲}{۴} \text{لا} + (۱-۷۲) \text{ک}$$

$$(۲) \frac{۱}{۳} \text{لوک} + \frac{۲+۷}{۷-۱} \text{ک} \quad (۳) \frac{۲}{۳۶} \text{من} + \frac{۱-۷۲}{۳۶} \text{ک}$$

$$(۴) \text{لوک} + \frac{۷}{۷+۱۱} \text{ک} \quad (۵) \text{جب} + (۱-۷۲) \text{ک}$$

$$(۶) ۲ (\sqrt{۱-۷۲} + \text{لوک} + \text{لا}) + \text{ک}$$

$$(۷) \frac{۱}{۳} \text{لوک} + \{ \sqrt{۵+۲۷۴-۷۲} + ۳ - \text{لا} \} + \text{ک}$$

$$(۸) ۳ (\sqrt{۷+۷۵-۱۹} + \frac{۱۹}{۴} \text{لوک} + (\frac{۵}{۴} - ۷)) + \text{ک}$$

$$(۹) \frac{۹}{۴} \text{جب} + \frac{۳-۷۲}{۴} \text{ک} - \sqrt{۵-۷۲-۷۱۲} + \text{ک}$$

$$(۱۰) \frac{۱}{۱۶} \text{لوک} - \frac{۳-۷۲}{۱+۷۲} \text{ک} - \frac{۱}{۸} \text{لوک} + (۳-۷۲-۷۱۲) \text{ک}$$

$$(۱۱) \frac{۱}{۲۱} \text{جب} + \frac{۳-۷۲}{۲۱} \text{ک} + \frac{۲}{۴} (\sqrt{۷۹+۷۳} + \text{ک})$$

$$(۱۲) \frac{۱}{۹} (۱۰-۷۳+۷۳-۷۲) + \text{ک} \quad (۱۳) \frac{۱}{۴} (۲-۷+۲) + \text{ک}$$

$$(۱۴) \frac{۱}{۴} (\text{سن} + \text{لا}) + \text{ک} \quad (۱۵) \frac{۱}{۲} (\text{لوک} + \text{لا}) + \text{ک}$$

$$(۱۶) \frac{۱}{۲} \text{ط} - \text{جب} + \frac{۱}{۱۲} \text{ک} - (۱۸) \frac{۱}{۴} - \text{محطه} - \text{جب} + \frac{۵}{۴} \text{محطه} + \text{ک}$$

$$- \frac{۳ \times ۵}{۲ \times ۳ \times ۶} \text{جب} + \frac{۱ \times ۳ \times ۵}{۲ \times ۳ \times ۶} \text{ط} + \text{ک}$$

$$(۱۹) \frac{۱}{۲} \text{محطه} + \text{جب} + \frac{۱ \times ۳}{۲ \times ۳} \text{محطه} + \frac{۱ \times ۳}{۲ \times ۳} \text{جب} + \frac{۱ \times ۳}{۲ \times ۳} \text{ط} + \text{ک}$$

$$(۲۰) \frac{1}{4} \text{ جم } ط - \frac{3}{5} \text{ جم } ط + \text{جم } ط - \text{جم } ط + ک$$

$$(۲۱) \frac{1}{5} \text{ جب } ط - \frac{2}{4} \text{ جب } ط + \text{جب } ط + ک$$

### مشقی سوالات (۲۴) صفحہ ۲۲۰

$$(۱) \text{ جب } ۲۱ - \frac{\text{لاجم } ۲۱}{۲} + ک (۲) (۳) \text{ جب } ۱۱ + ۲۱ \text{ جم } لا + ک$$

$$(۳) (لا - ۳ - لا + ۱۱ + ۶) ط + ک$$

$$(۴) \frac{1}{۴۴} \{ ۱۱ ( \text{جب } ۱۱ + ۱۱ ) + \text{جم } ۱۱ + ۲۱ \text{ جم } لا + ک$$

$$(۵) \frac{لا}{۲} (\text{لوک } لا) - \frac{لا}{۲} (\text{لوک } لا) + ک$$

$$(۶) \frac{ط}{5} (\text{جب } ۲ - ۱۱ \text{ جم } لا) + ک$$

$$(۷) \frac{ط}{5} (\text{جب } ۲ + ۱۱ \text{ جم } لا) + ک$$

$$(۸) \frac{لا}{۱۱} (۳ \text{ جب } ۱۱ - \text{جم } ۱۱) + ک$$

$$(۹) \frac{1}{۱۱} ط (\text{جب } لا - \text{سن } ۲) + ک$$

$$(۱۰) لا \text{ سن } لا + \text{لوک } لا + ک$$

$$(۱۱) \frac{1}{۱۱} (لا - ۱) \text{ جب } لا + \frac{1}{۱۱} لا - لا + ک$$

$$(۱۲) \frac{لا}{۳} \text{ سن } لا - \frac{لا}{۴} + \frac{1}{۴} \text{ لوک } لا + ک$$

$$(۱۳) \frac{1}{۴۴} - \frac{1}{۴۴} (\text{جب } ۱۱ - \frac{۳}{۲} \text{ جب } لا + \frac{۱۵}{۲} \text{ جب } لا - لا) + ک$$

$$(۱۴) \frac{1}{۴۴} (\frac{1}{2} \text{ جم } لا - \frac{۶}{5} \text{ جم } لا + ۷ \text{ جم } لا - ۳۵ \text{ جم } لا) + ک$$

$$(۱۵) - \frac{3}{8} \text{ لا} + \frac{1}{4} \text{ جب لا} + \frac{1}{4} \text{ جب لا} + \text{ک}$$

$$(۱۶) \text{ جب لا} - \frac{2}{3} \text{ جب لا} + \frac{1}{3} \text{ جب لا} + \text{ک}$$

$$(۱۷) \frac{1}{8} \text{ جب لا} - \frac{1}{4} \text{ جب لا} + \text{ک}$$

$$(۱۸) \frac{1}{9} \text{ جم لا} - \frac{2}{5} \text{ جم لا} + \frac{2}{5} \text{ جم لا} - \frac{1}{3} \text{ جم لا} + \text{ک}$$

$$(۱۹) \frac{1}{2} \text{ جب لا} - \frac{1}{4} \text{ جب لا} + \text{ک}$$

$$(۲۰) - \frac{1}{10} \text{ جب لا} + \frac{1}{18} \text{ لا} + \left( \frac{2}{2} \text{ لا} - \frac{1}{3} \text{ جب لا} + \frac{1}{14} \text{ جب لا} \right) + \text{ک}$$

### مشقی سوالات (۲۵) صفحہ ۲۳۲

$$(۱) - \frac{2}{4} (۲) - \frac{1}{12} \text{ لو کو ۵} (۳) \frac{\pi}{4}$$

$$(۴) \text{ لو کو } \frac{\sqrt{2} \pi + 4}{\sqrt{2} \pi - 2} (۵) \frac{\pi}{12} (۶) \frac{\pi}{10} (۷) \frac{\pi}{8}$$

$$(۸) \frac{\pi}{\sqrt{2} \pi} (۹) \frac{\pi}{2} (۱۰) \frac{\pi}{3} (۱۱) \frac{\pi}{12} (۱۲) \frac{\pi \pi}{32}$$

$$(۱۳) \frac{254}{493} (۱۴) \frac{\pi \pi}{512} (۱۵) \frac{2}{35} (۱۶) \frac{\pi}{315}$$

### مشقی سوالات (۲۶) صفحہ ۲۳۶

$$(۱) \frac{\sqrt{2} \pi}{\pi} (۲) 2 (۳) \frac{14}{3} (۴) 2 (۵) \frac{52}{9}$$

$$(۶) \frac{1}{4} (۷) \frac{1}{5} \text{ لو کو } \frac{2}{4} (۸) \frac{\pi}{\pi} - \sqrt{2} (۹) \pi \pi (۱۰) \frac{1}{\pi} \pi \text{ کو ب}$$



## مشقی سوالات (۲۷) صفحہ ۲۴۱

$$(۱) \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \text{ کو } \frac{3-\sqrt{9+2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} + \text{ک}$$

$$(۳) \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ کو } \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ قطب } \frac{1}{\sqrt{2}} + \text{ک}$$

$$(۵) - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ کو } (\sqrt{2}-\sqrt{3}) + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \text{ک}$$

$$(۷) \frac{1}{3} \text{ کو } \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \right\} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \text{ک}$$

$$(۹) \frac{1}{4} + \frac{2+\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}+2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{18} \text{ مست } \frac{2+\sqrt{2}}{3} + \text{ک}$$

$$(۱۰) 2 - \sqrt{2} \text{ جب } \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}} + \text{ک} \quad (۱۱) \frac{\pi}{2} \text{ جب}$$

$$(۱۳) \frac{\pi}{3} \quad (۱۴) \frac{\pi}{3}$$

۴ و ۵ - صفحہ ۲۴۶-۲۴۹

$$(۲) (۱) \pm \sqrt{3} \pm 1$$

$$(ب) \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}$$

$$(ج) \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2} \text{ جب}$$

$$(د) \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{7}{\sqrt{2}} \text{ (۲۲ کے مطابق)}$$

$$(۵) \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(۵) (۱) \sqrt{\frac{36}{12}}$$

$$\frac{289}{4m} \quad (ب)$$

$$(ج) \quad 0 < \text{لوک} (1-u) < 1$$

$$(د) \quad 1 - \frac{1}{\text{لوک} - 9 \text{ لوک}^2}$$

$$(ه) \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$(ا) \quad \frac{\sqrt{192} - \sqrt{216}}{3} + \frac{\sqrt{108} - \sqrt{128}}{3}$$

$$253 - 252 \text{ صفحہ } 4, 3$$

$$(3) \quad 15 + (2-u)24 + (2-u)^2 13 + (2-u)^3 3$$

$$(4) \quad \text{لوک} (u+1) = \text{لوک} + \frac{u}{2} + \frac{u^2}{2m^2} + \frac{u^3}{3m^3} + \frac{u^4}{4m^4} + \dots$$

$$\text{لوک} (1+u) = \text{لوک} + \frac{u}{2} + \frac{u^2}{2m^2} + \frac{u^3}{3m^3} + \frac{u^4}{4m^4} + \dots$$

$$(5) \quad 100 - 119m + 13m^2 - 5m^3$$

$$(6) \quad 22 + 11m + 1m^2 + 1m^3$$

$$(7) \quad \frac{(1-u)^3}{3} + \frac{(1-u)^2}{2} - (1-u)$$

$$(8) \quad \text{جب } (1+u) = \text{جب } 1 + \text{جب } 1 + \text{جب } 1 + \text{جب } 1 + \dots$$

$$(9) \quad \frac{(1-u)^2}{2} + \frac{1-u}{2} - \frac{1}{2}$$

$$(10) \quad \left( \dots + \frac{u^2}{2} + \frac{u}{2} + 1 \right) \text{ قو } (1)$$

$$(ب) \quad 1 + m + m^2 + \dots + m^{n-1} + m^n$$

$$\begin{aligned}
 (۱۲) (۱) \quad & \dots + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + ۱ = ۱ \\
 (ب) \quad & \dots + \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۲} - ۱ = (۱+۱) \\
 (ج) \quad & \dots + \frac{۱ \times ۳ \times ۱}{۵ \times ۳ \times ۲} + \frac{۱ \times ۱}{۳ \times ۲} + ۱ = ۱ \\
 (د) \quad & \dots - \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۳} - ۱ = ۱ \\
 (ه) \quad & \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} - ۱ \\
 (و) \quad & ۱ = ۱ + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۱۵} + \frac{۱}{۳۱۵} \\
 (ز) \quad & \dots + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲۲} + \frac{۱}{۴۲۰} + ۱ = ۱
 \end{aligned}$$

۴، ۵ - صفحہ ۲۵۶

$$\begin{aligned}
 (۲) (۱) \quad & ۱ = ۱, ۲ = ۱, ۳ = ۱ \\
 (ب) \quad & ۱ = ۱, ۲ = ۱, ۳ = ۱ \\
 (ج) \quad & ۱ = ۱, ۲ = ۱, ۳ = ۱ \\
 (د) \quad & ۱ = ۱, ۲ = ۱, ۳ = ۱ \\
 (ه) \quad & ۱ = ۱, ۲ = ۱, ۳ = ۱ \\
 (و) \quad & ۱ = ۱, ۲ = ۱, ۳ = ۱
 \end{aligned}$$

- (ز) لا = ۰ اعظم = صفر  
 (ح) لا =  $\frac{3}{4}$  اقل لا = جب  $\frac{3}{4}$  اعظم  
 (ط) لا = جم لا اعظم  
 (ی) لا = ۰ اقل ..... (آخری رقم + ۲۱۶ لا)  
 (ک) لا = ۰ اقل  
 (ل) لا = ۰ پر کچھ نہیں  
 (م) لا =  $\frac{1}{2}$  اتنی  
 (ن) لا =  $\pm \frac{\pi}{2}$  اعظم و اقل  
 (ص) لا = ۲ پر سمجھ نہیں۔

غیر معین شکلیں

۵/۶ - صفحہ ۲۵۸-۲۵۹

- (۱)  $\frac{1}{4}$   
 (ب)  $\frac{1}{1-3/4}$   
 (ج)  $\frac{2}{2-1}$   
 (د)  $\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$   
 (ه)  $\frac{49-4}{9}$   
 (و)  $\frac{1}{2}$   
 (ز) ۱  
 (ح) ۱  
 (ط)  $\frac{1}{8} -$

(ی) نوک  $\frac{1}{2}$ 

(ک) صفر

(ل)  $\frac{1}{2}$ (م)  $\infty$ (ن)  $-\frac{1}{2}$ ۲۶۳-۲۶۱ صفر ۵۲-۶۱

(۳) صفر

(۴) صفر

(۵)  $-\infty$ (۶)  $\frac{2}{5}$ 

(۷) صفر

(۱۰)  $\frac{2}{3}$ (۱۱)  $2-$ 

(۱۲) صفر

(۱۳)  $\frac{1}{3}$ 

(۱۴) ۱

(۱۵) ۱

(۱۶)  $\frac{2}{3}$ 

(۱۷) صفر

(۱۸)  $-\frac{1}{2}$ 

(۱۹) ۱

(۲۳) ۷

(۲۴) ۱

$$\frac{1}{70} \quad (25)$$

$$\frac{1}{71} \quad (26)$$

$$\frac{2}{70} \quad (27)$$

$$\frac{1}{71} \quad (28)$$

$$\frac{2}{71} \quad (29)$$

$$\frac{1}{70} \quad (30)$$

$$\frac{1}{71} \quad (31)$$

$$\frac{2}{70} \quad (32)$$

$$\frac{20}{71} \quad (33)$$

۲۶۶-۲۶۵

(۲) تیسرے اور پانچویں رتبہ کا تناسب

(۳) دوسرے اور چھٹے رتبہ کا تناسب

(۴) دوسرے رتبہ کا تناسب مبداء پر

(۵) دوسرے رتبہ کا تناسب مبداء پر

(۶) تیسرے رتبہ کا تناسب مبداء پر

۲۶۵-۲۶۴

$$\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{8}{3} = 2 \frac{2}{3}$$

$$\frac{125}{2} = 62 \frac{1}{2}$$

$$\frac{221}{12} = 18 \frac{5}{12}$$

$$\frac{125}{92} = 1 \frac{33}{92}$$

$$\frac{31}{28} = 1 \frac{3}{28}$$

$$\frac{2}{26} = \frac{1}{13}$$

$$\frac{5}{2} = 2 \frac{1}{2}$$

$$\overline{5} \mid 5 = \text{سر} \quad 4 = \text{بہ} \quad 8 = \text{عہ}$$

$$\frac{2}{1} = \text{سر} \quad 1. = \text{بہ} \quad \frac{2-2}{1} = \text{عہ} \quad (۴)$$

$$\frac{2}{2} = \text{سر} \quad 1. = \text{بہ} \quad \frac{2+2}{1} = \text{عہ}$$

$$\frac{2}{3} = \text{سر} \quad 1. = \text{بہ} \quad \frac{2}{3} = \text{عہ} \quad (۵)$$

$$6 = \text{سر} \quad 2 = \text{بہ} \quad 3 = \text{عہ} \quad (۶)$$

$$\frac{39}{8} \quad (۸)$$

$$\frac{1}{8} \quad \frac{1}{4} = \text{سر} \quad (1 \pm 1) \quad (۱۰)$$

$$\pm 931 \quad (۱۱)$$

$$\frac{2(2-1)}{2} = \text{بہ} \quad \frac{2(2-1)}{2} = \text{عہ} \quad (۱۲)$$

$$\frac{2}{2}(2-1) = \frac{2}{2}(2) + \frac{2}{2}(1)$$

$$\frac{2}{2}(2+1) = \text{سر} \quad 13 + \frac{1}{2} = \text{بہ} \quad 12 = \text{عہ} \quad (۱۳)$$

$$\frac{2}{2}(2+1) = \text{سر} \quad \frac{2(2+1)}{2} = \text{بہ} \quad \frac{2(2+1)}{2} = \text{عہ} \quad (۱۴)$$

$$\frac{1}{2}(2+1) = \text{سر} \quad \frac{1}{2}(2+1) = \text{بہ} \quad \frac{1}{2}(2+1) = \text{عہ} \quad (۱۵)$$

$$\frac{2}{2}(2+1) = \text{سر} \quad 2 = \text{بہ} \quad 8 = \text{عہ} \quad (۱۶)$$

$$\frac{2}{2}(2+1) = \text{سر} \quad \frac{2}{2}(2+1) = \text{بہ} \quad \frac{2}{2}(2+1) = \text{عہ} \quad (۱۷)$$

$$\frac{2}{2}(2+1) = \text{سر} \quad \frac{2}{2}(2+1) = \text{بہ} \quad \frac{2}{2}(2+1) = \text{عہ} \quad (۱۸)$$

$$\frac{2}{2}(2+1) = \text{سر} \quad \frac{2}{2}(2+1) = \text{بہ} \quad \frac{2}{2}(2+1) = \text{عہ} \quad (۱۹)$$

$$(۲۰) \text{ ع} = \text{ل} - \text{مس} \text{ ل} = \text{بہ} = \text{ا} + \text{س} = \text{قط ل}$$

$$(۲۱) \frac{\frac{۲}{۲}}{۲} = \frac{\frac{۲}{۲}}{۲} (\text{ل} - \text{ل}) - \frac{\frac{۲}{۲}}{۲} (\text{ل} + \text{ل})$$

$$(۲۲) \text{ ع} = \text{ل} + \frac{\frac{\frac{۲}{۲}}{۲} (\frac{\frac{۲}{۲}}{۲} + 1)}{۲} = \text{بہ} = \frac{\frac{\frac{۲}{۲}}{۲} (\frac{\frac{۲}{۲}}{۲} + 1)}{۲}$$

$$\infty \cdot \infty \cdot \frac{\frac{\frac{۲}{۲}}{۲} \left\{ \frac{\frac{۲}{۲}}{۲} + 1 \right\}}{۲} = \text{س}$$





# صحت نامہ

## تفرقی و تکملی احصاء

| صحت                 | غلط                 | ہا | ہا  | صحت                           | غلط                           | ہا | ہا |
|---------------------|---------------------|----|-----|-------------------------------|-------------------------------|----|----|
| نو                  | و                   | ۱۳ | ۸۶  | ہم مان                        | کم پلٹتے                      | ۴  | ۷  |
| و                   | و                   | ۱۸ | ۸۹  | $\frac{ن(۱+۱)}{۱}$            | $\frac{ن(۱+۱)}{۱}$            | ۱۲ | ۱۶ |
| عدد                 | عدو                 | ۱۰ | ۹۱  | $\frac{۱۰۰۰}{۱۰}$             | $\frac{۱۰۰۰}{۱۰}$             | ۱۶ | ۲۳ |
| کریکے               | کریکے               | ۸  | ۱۰۵ | $(\frac{۱}{۳} - \frac{۳}{۳})$ | $(\frac{۱}{۳} - \frac{۳}{۳})$ | ۱۳ | ۳۷ |
| جم (۲+۳) لا         | جم (۲+۷) لا         | ۱۷ | ۱۲۰ | آور                           | آو                            | ۱۰ | ۴۲ |
| فلا                 | فلا                 | ۱۲ | ۱۳۲ | ۳۷۱                           | ۳۷۱                           | ۲  | ۴۷ |
| $\frac{۱}{۳-۲}$ فلا | $\frac{۱}{۳-۲}$ فلا | ۱۳ | ۵   | $ صم+صم $                     | $ صم+صم $                     | ۱۸ | ۵۲ |
| (طہ ۲) ما           | (طہ ۲) ما           | ۹  | ۱۲۸ | لا                            | لا                            | ۴  | ۵۸ |
| دارو مدار           | دارو مدار           | ۷  | ۱۴۹ | صحیح ۲۷۷۱۸۲۸۱۸۲۸۵۰۰۰          |                               | ۳  | ۸۲ |
| $\frac{۱}{۳}$ لا    | $\frac{۱}{۳}$ لا    | ۲۰ | ۱۷۳ | تقریبی                        | تقریبی                        | ۹  | ۷  |
| فاصلوں کے مجموعہ    | فاصلوں کے مجموعہ    | ۵  | ۱۷۷ | $(۱ + \frac{۱}{ن})$           | $(۱ - \frac{۱}{ن})$           | ۸  | ۸۳ |
| کلیثا اوپر          | کلیثا وپر           | ۲۴ | ۷   | صحیح ۲۷۷۱۸۲۸۱۸۲۸۵۰۰۰          |                               | ۱۲ | ۸۵ |

| صحيح          | غلط          | نہا | نہا | صحيح          | غلط           | نہا  | نہا |
|---------------|--------------|-----|-----|---------------|---------------|------|-----|
| شیلو          | ۱ شیلو       | ۳   | ۲۵۴ | رفتار         | رفتار         | ۱۶   | ۱۸۳ |
| ۲۲۱۶ +        | ۱۶۲۱۶ +      | ۱۳  | ۲۵۶ | ۱ -           | ۱             | آخری | ۱۹۲ |
| (محم لا جب لا | (جم لا جب لا | ۳   | ۲۶۳ | ہر تکملہ      | پر تفاعل      | =    | ۱۹۸ |
| - لا          | + لا         | ۱۲  | ۲۷۳ | فر لا = فر لا | فر لا = فر لا | ۳    | ۲۰۱ |
| + لا          | - لا         | ۱۲  | =   | شیلو          | اشیلو         | ۲۱۷۹ | ۲۵۰ |
|               |              |     |     | شیلو          | اشیلو         | ۶    | ۲۵۱ |

